

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI FIRENZE  
Facoltà di Scienze M.F.N.  
Corso di laurea in Ottica

Dr. Nicola Poli

**APPUNTI SULL'ESPERIENZA  
DELL'INTERFEROMETRO DI MICHELSON**

Anno Accademico 2004-2005

Versione del 15 Maggio 2005

# 1 Cenni di Ottica Fisica - Onde elettromagnetiche

Lo stato di eccitazione che si origina nello spazio a causa della presenza di cariche elettriche è chiamato *campo elettromagnetico*. Questo è rappresentato da due vettori  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{B}$  chiamati rispettivamente vettore di *campo elettrico* e vettore di *induzione magnetica*. Per descrivere l'effetto del campo nei materiali è necessario introdurre un secondo set di vettori rispettivamente il vettore *induzione elettrica*  $\mathbf{D}$  ed il vettore *campo magnetico*  $\mathbf{H}$ . Le derivate rispetto alle coordinate spaziali e temporali di questi vettori sono legate dalle cosiddette *equazioni di Maxwell* che nel SI si possono scrivere:

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \quad (1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (2)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (3)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (4)$$

dove il vettore *densità di corrente*  $\mathbf{J}$  e la densità di carica  $\rho$  rappresentano le sorgenti (corrente e carica) del campo elettromagnetico. Le eq. [1-4] costituiscono un sistema di equazioni differenziali accoppiate la cui soluzione descrive in maniera completa l'interazione reciproca tra cariche elettriche ferme o in movimento poste nel vuoto o immerse in un materiale.

Nel caso generale è possibile ricavare una soluzione alle equazioni per via numerica. In alcuni casi particolari è invece possibile ricavare una soluzione analitica, come nel caso dello studio della propagazione delle onde elettromagnetiche in un mezzo dielettrico illimitato isotropo ed omogeneo. In questo caso infatti le equazioni si semplificano notevolmente e nell'ipotesi ulteriore che il mezzo sia un isolante perfetto ( $\mathbf{J}=0$ ) ed elettricamente neutro ( $\rho=0$ ) possiamo ricavare le cosiddette *equazioni delle onde elettromagnetiche*:

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \epsilon\mu \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0 \quad (5)$$

$$\nabla^2 \mathbf{B} - \epsilon\mu \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} = 0 \quad (6)$$

la soluzione a queste equazioni è rappresentata da un'onda che si propaga alla velocità  $v = 1/\sqrt{\epsilon\mu}$ , con  $\epsilon$  costante dielettrica e  $\mu$  permeabilità magnetica del mezzo<sup>1</sup>.

$$f(\mathbf{r}, t) = f(\chi) = f(\mathbf{r} \pm vt) \quad (7)$$

In generale la velocità di propagazione delle onde elettromagnetiche in un mezzo dipende dalle caratteristiche del mezzo stesso. Il rapporto

$$n = c/v \quad (8)$$

---

<sup>1</sup>nel caso particolare del vuoto si ottiene  $v = c = 1/\sqrt{\epsilon_0\mu_0}$  con  $\epsilon_0 = 8.854 \cdot 10^{-12} \frac{\text{C}^2}{\text{Nm}^2}$ ,  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{N}}{\text{A}^2}$

tra la velocità nel vuoto e la velocità nel mezzo è detto *indice di rifrazione* del mezzo trasparente.

Nel caso particolare di una *onda piana monocromatica* il campo elettrico  $\mathbf{E}$  ed il campo magnetico  $\mathbf{B}$  saranno allora grandezze oscillanti che si propagano nello spazio:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_0 \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t + \phi) \quad (9)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{B}_0 \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t + \phi) \quad (10)$$

dove abbiamo definito le seguenti quantità:

- pulsazione dell'onda  $\omega = 2\pi\nu$  (con  $\nu$  frequenza di oscillazione)
- velocità dell'onda  $v = 1/\sqrt{\epsilon\mu} = c/n$  (con  $c$  velocità nel vuoto ed  $n$  indice di rifrazione)
- lunghezza d'onda  $\lambda = vT = v/\nu = \lambda_0/n$  (con  $\lambda_0 = c/\nu$  lunghezza d'onda nel vuoto)
- vettore d'onda  $\mathbf{k} = \frac{2\pi\mathbf{n}}{\lambda}$  (con  $\mathbf{n}$  versore della direzione di propagazione dell'onda)
- sfasamento dell'onda  $\phi$

Le unità di misura dei campi  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{B}$  nel SI sono rispettivamente il V/m ed il T (Tesla). I campi  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{B}$  risultano inoltre sempre ortogonali tra di loro ed ortogonali alla direzione di propagazione dell'onda individuata dal vettore  $\mathbf{k}$ . L'onda elettromagnetica è dunque un'onda *trasversale*, ossia un'onda la cui oscillazione risulta ortogonale alla direzione di propagazione.

## 2 Interferenza

Consideriamo due onde piane monocromatiche polarizzate linearmente

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_{01} \cos(k_1 z - \omega_1 t + \phi_1) \quad (11)$$

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_{02} \cos(k_2 z - \omega_2 t + \phi_2) \quad (12)$$

$$(13)$$

dove per brevità abbiamo riportato solo l'andamento del campo elettrico  $\mathbf{E}$ . Supponiamo che i due campi elettrici siano paralleli tra loro e diretti verso  $y$ , mentre la direzione di propagazione delle due onde sia  $z$ . Data la natura ondulatoria del campo elettromagnetico in tali condizioni è intuitivo pensare che vi possa essere una interazione reciproca tra i due campi, i cui effetti possono sommarsi o sottrarsi in funzione dei parametri delle due onde. Vediamo più in dettaglio come è possibile ricavare le equazioni che descrivono questo fenomeno.

Per il principio di sovrapposizione avremo che il campo in ogni punto dello spazio è dato dalla somma dei due campi:

$$\mathbf{E}_T = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 \quad (14)$$

In realtà la quantità che interessa (ciò che viene misurato da un qualsiasi rivelatore, come anche dal nostro occhio) è l'intensità ottica  $I_T$  che risulta proporzionale al modulo quadro del campo totale. In particolare questa viene definita come la media su un periodo  $T$  (lungo rispetto al periodo di oscillazione del campo elettrico  $2\pi/\omega$ ) del modulo quadrato del campo elettrico  $|\mathbf{E}|$ . In formule:

$$I = \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \frac{1}{T} \int_0^T |\mathbf{E}|^2 dt \quad (15)$$

L'unità di misura dell'intensità nel SI è il  $\text{W}/\text{m}^2$ .

Prendiamo adesso in considerazione il caso particolare di due onde elettromagnetiche che oscillano alla stessa frequenza ( $\omega_1 = \omega_2$ ) e che si propagano nello stesso mezzo (e dunque anche  $k_1 = k_2$ ). Utilizzando le eq. 15, 14 si può dimostrare che l'intensità totale è data da:

$$I_T = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos \Delta \quad (16)$$

dove  $I_1$  e  $I_2$  sono le intensità delle singole onde (proporzionali rispettivamente a  $|\mathbf{E}_{01}|^2$  ed  $|\mathbf{E}_{02}|^2$ ) mentre il terzo termine, dato dal doppio prodotto  $2|\mathbf{E}_1 \mathbf{E}_2|$ , è legato all'interferenza delle due onde. Questo termine varia periodicamente (con periodo  $2\pi$ ) in funzione dello sfasamento relativo tra le due onde  $\Delta = \phi_2 - \phi_1$ .

Nel caso particolare  $I_1 = I_2 = I$  la (16) viene ad assumere la ben nota forma:

$$I_T = 2I + 2I \cos \Delta \quad (17)$$

Quindi, per due onde che interferiscono, aventi la stessa frequenza di oscillazione, l'intensità totale risulta modulata periodicamente (con periodo  $2\pi$ ) in funzione dello sfasamento relativo  $\Delta$ . In particolare si può osservare che l'intensità totale passa da un valore massimo pari a quattro volte l'intensità del singolo fascio (*interferenza costruttiva*) per  $\Delta = 0$ , fino ad annullarsi (*interferenza distruttiva*) per  $\Delta = \pi$ .

Una quantità utile, introdotta per lo studio dell'interferenza tra due onde, è il *cammino ottico* dato dal prodotto tra il cammino reale  $L$  percorso dalla singola onda e l'indice di rifrazione del mezzo  $n$ :  $l = nL$ . Per due onde elettromagnetiche che percorrono due cammini spaziali distinti individuati da indici di rifrazione  $n_1$  ed  $n_2$ , lo sfasamento  $\Delta$  che si accumula è infatti dato da

$$\begin{aligned} \Delta &= k_2 x_2 - k_1 x_1 = 2\pi \left( \frac{x_2}{\lambda_2} - \frac{x_1}{\lambda_1} \right) = \\ &= \frac{2\pi}{\lambda_0} (n_2 x_2 - n_1 x_1) = \frac{2\pi}{\lambda_0} (l_2 - l_1) \end{aligned} \quad (18)$$

cioè direttamente proporzionale alla differenza dei due cammini ottici associati alle due onde.

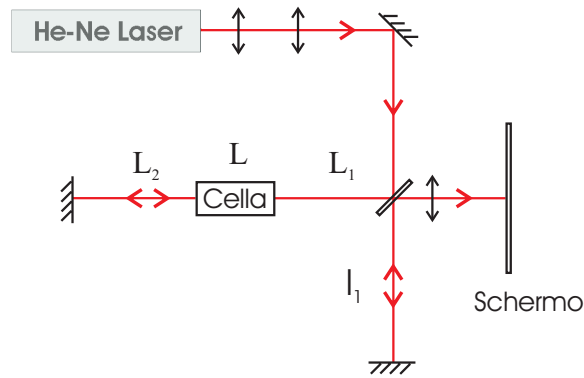


Figura 1: *Schema dell'interferometro di Michelson del laboratorio. La sorgente è un laser He-Ne stabilizzato. Il fascio viene prima allargato e collimato per mezzo di un telescopio e poi suddiviso in due per mezzo di un beam-splitter. Su uno dei due rami è posta una cella di vetro collegata alla pompa per il vuoto. La lettura della pressione della cella è eseguita per mezzo di un manometro posto sulla pompa. La figura di interferenza prodotta dall'interferometro viene infine proiettata su uno schermo per mezzo di una lente.*

## 2.1 Interferometro di Michelson

L'interferometro di Michelson è uno strumento che permette di confrontare due radiazioni elettromagnetiche che percorrono due cammini distinti. Una rappresentazione schematica della configurazione ottica è mostrata in figura 1. In questa configurazione si osserva come il fascio laser proveniente dalla sorgente (laser He-Ne) venga diviso in due parti per mezzo di una lamina parzialmente riflettente (il *beam-splitter*). Successivamente i due fasci percorrono cammini ottici distinti prima di ricongiungersi di nuovo sulla lamina, dove avviene l'interferenza. Su uno dei due rami è inoltre posta una cella di vetro collegata alla pompa per il vuoto. La figura di interferenza risultante viene infine proiettata sullo schermo per mezzo di una lente.

Si può osservare come la forma della figura d'interferenza, legata direttamente alla forma relativa dei due fronti d'onda che interferiscono, sia data da una successione più o meno fitta di righe scure e righe più intense, la cui orientazione spaziale inoltre cambia in funzione della direzione relativa dei due fasci che interferiscono. Per la misura è importante assicurarsi che la figura di interferenza contenga non più di una frangia scura, questa è la condizione che più si avvicina alla condizione ideale, ossia per interferenza tra due onde con fronti d'onda piani, nella quale si otterrebbe una figura di interferenza omogenea senza frange, ma la cui intensità dipende dallo sfasamento tra le due onde<sup>2</sup>.

<sup>2</sup>Dato che l'occhio umano non è un buon sensore per rivelare l'intensità assoluta di un fascio (sensibilità logaritmica, saturazione), è conveniente dal punto di vista sperimentale avere una figura di interferenza con una sola frangia (in modo che si possa osservare al

La forma della figura di interferenza dipenderà inoltre dallo sfasamento relativo delle due onde ossia, come abbiamo visto precedentemente (eq. 18), dalla variazione della differenza tra i due cammini ottici associati alle due onde. Con riferimento alla fig 1 possiamo dunque scrivere:

$$\Delta l = 2[n_A(L_1 + L_2) + n_x L] - 2n_A l_1 = 2n_x L + \text{cost} \quad (19)$$

dove abbiamo supposto che le quantità  $L_1$ ,  $L_2$  ed  $n_A$  risultino costanti. Quindi utilizzando l'eq. 18 ricaviamo

$$\Delta = \frac{2\pi}{\lambda_0}(2n_x L + \text{cost}) = \frac{2\pi}{\lambda_0}(2n_x L) + \Delta_0 \quad (20)$$

Se allora supponiamo che lo sfasamento iniziale sia tale da avere una frangia al centro del fascio, la prossima frangia passerà dallo stesso punto per uno sfasamento pari a  $\Delta = 2\pi$ . Questo implica dunque una variazione di cammino ottico pari a:

$$\Delta l = 2n_x L = \lambda_0 \quad (21)$$

L'osservazione del passaggio del numero di frange  $N$  nella figura di interferenza è quindi direttamente legata a variazioni di indice di rifrazione all'interno della cella (supponendo la lunghezza della cella  $L$  costante) legate alla variazione di pressione ed indotte tramite la pompa a vuoto. Come vedremo nella sezione successiva eseguendo una misura del numero di frange osservate in funzione della pressione ed estrapolando il numero di frange per un vuoto "assoluto" è possibile eseguire una misura dell'indice di rifrazione dell'aria.

### 3 Equazione di Lorentz-Lorentz

L'indice di rifrazione  $n$  di una sostanza ad una data lunghezza d'onda  $\lambda$  in funzione della sua pressione  $P$  e della sua temperatura  $T$  è ben descritto dalla relazione fenomenologica (detta anche *equazione di Lorentz-Lorentz*)

$$A = \frac{RT}{P} \frac{n^2 - 1}{n^2 + 2} \quad (22)$$

dove  $A$  è il *coefficiente di riflettività molare* della sostanza, mentre  $R$  è la costante dei gas perfetti ( $R = 8.31$  J/mol K). Le dimensioni di  $A$  nel SI sono quelle di un volume molare ossia pari al  $\text{m}^3/\text{mol}$ . Sperimentalmente si osserva che ad una data lunghezza d'onda  $\lambda$  la costante  $A$  dipende quasi esclusivamente dalla composizione chimica della sostanza stessa ma non dal suo stato (gas, liquido). Una misura accurata di questa quantità può dunque essere utilizzata per analisi della composizione chimica di una certa sostanza o ad esempio della della concentrazione di una miscela di gas, o liquidi

---

variare della pressione nella camera un passaggio di frange in un punto stabilito dello schermo). Questo riferimento spaziale permette inoltre di eseguire conteggi frazionari.

(trasparenti!) una volta noti i componenti della miscela. Nel caso dei gas come ad esempio per l'aria ( $n \sim 1$ ) l'eq. 22 può essere riscritta nella forma

$$A = \frac{RT}{P} \frac{n^2 - 1}{3} \quad (23)$$

Da questa relazione è possibile ricavare una funzione che lega il numero delle frange che si osservano in funzione della pressione all'interno della cella. Il numero di frange osservate è infatti legato alla variazione di cammino ottico  $\Delta l$  sul ramo dell'interferometro contenente la cella dovuto alla variazione  $\Delta n$  dell'indice di rifrazione:

$$\Delta l = 2L\Delta n = 2L(n_A - n) \quad (24)$$

dove con  $n_A$  abbiamo indicato l'indice di rifrazione dell'aria a pressione atmosferica  $p_A$  e  $2L$  è pari al percorso geometrico della luce all'interno della cella (pari al doppio della lunghezza effettiva della cella meno lo spessore delle finestre). D'altra parte, come abbiamo visto nella sezione precedente, ad ogni passaggio di frangia è associato uno sfasamento del campo elettrico pari a  $\Delta = 2\pi$  che corrisponde quindi ad una variazione di cammino ottico pari a  $\lambda_0$ , in formule abbiamo dunque:

$$\Delta l = N\lambda_0 \quad (25)$$

dove  $N$  è il numero delle frange. Utilizzando l'eq. 24 si può dunque ricavare la relazione

$$n = n_A - \frac{N\lambda_0}{2L} \quad (26)$$

Definiamo quindi  $N_v$  come il numero di frange che si osserverebbero nel caso in cui fosse realizzato un vuoto "assoluto" nella cella. In questo caso la (26) si scrive

$$1 = n_A - \frac{N_v\lambda_0}{2L} \quad (27)$$

Mediante queste ultime due relazioni è dunque possibile ricavare una equazione che lega il numero di frange con la pressione all'interno della camera:

$$\begin{aligned} \frac{3A}{RT} P &= n^2 - 1 = \left( n_A - \frac{N\lambda_0}{2L} \right)^2 - 1 = \\ &= \left( 1 + \frac{N_v - N}{2L} \lambda_0 \right)^2 - 1 \simeq \\ &\simeq \frac{(N_v - N)\lambda_0}{L} \end{aligned} \quad (28)$$

dove, al secondo passaggio si è usato il fatto che la quantità  $\frac{N\lambda_0}{L}$  risulta comunque molto minore di 1. Quest'ultima relazione può finalmente essere scritta come:

$$N = N_v - \frac{3A}{RT} \frac{L}{\lambda_0} P \quad (29)$$

Il numero di frangie  $N$  che si osservano passare nella figura di interferenza in funzione della pressione sarà dunque proporzionale alla pressione  $P$  di aria nella camera. Se riportate in grafico il numero di frange in funzione della pressione nella camera dovreste osservare una dipendenza lineare. Ripetete più volte la misura in modo da ottenere un valore medio  $\bar{N}$  ed un errore  $\Delta\bar{N}$ , dato dallo scarto massimo delle misure dal valore medio, per ogni valore di pressione regolata con la pompa.

Eseguendo un fit lineare su questi dati sarà possibile ricavare le quantità  $N_v$  e  $\frac{3A}{RT} \frac{L}{\lambda_0}$  con il loro errore, direttamente legate all'indice di rifrazione dell'aria  $n_A$  (tramite la relazione 27) e al coefficiente di rifrazione molare  $A$ .

La misura viene eseguita per mezzo di un laser He-Ne stabilizzato la cui lunghezza d'onda nel vuoto è  $\lambda_0 = 632.991$  nm. La quantità che rimane da stimare è dunque la quantità  $L$ , per questa potete ad esempio utilizzare il calibro ventesimale del laboratorio. La propagazione dell'errore per le due quantità  $n_A$  ed  $A$  è banale. ed è lasciata per esercizio. Si può comunque intuire che la accuratezza della misura è limitata dalla conoscenza della distanza  $L$ . Tipicamente questa misura limita a circa il 3% l'accuratezza sulle determinazioni di  $A$ . La misura di  $n_A$  è invece più accurata (tipicamente si ottengono errori relativi dell'ordine di  $10^{-5}$ ) grazie al metodo di misura utilizzato.