

UNIVERSITA' DEGLI STUDI DI FIRENZE  
Facoltà di Scienze M.F.N.  
Corso di Laurea in Fisica

Prof. Roberto Falciani

Prof. Andrea Stefanini

**Appunti aggiuntivi al corso di  
ESPERIMENTAZIONI DI FISICA I**

**MISURA DELLA DISTANZA FOCALE  
DI UNALENTE CONVERGENTE E DI UNALENTE DIVERGENTE**

Anno Accademico 2002-2003

# 1 Introduzione

Tratteremo tutte le lenti usate in questa misura come se fossero *sottili* applicando quindi i risultati ottenuti in questa approssimazione (formula dei punti coniugati, ingrandimento lineare, somma dei poteri diottrici, ecc.).

Per identificare la lente convergente fra le due lenti che vengono fornite basta osservare che quella convergente,  $L_c$ , fornisce un'immagine reale di un oggetto lontano (ad esempio, sul pavimento verrà prodotta un'immagine delle lampade poste sul soffitto del laboratorio se la lente sarà posta ad una distanza dal pavimento dell'ordine della sua distanza focale), mentre con la lente divergente,  $L_d$ , non si ha mai la formazione di un'immagine reale.

Prima di iniziare le misure vere e proprie è sempre consigliabile fare una stima grossolana della distanza focale  $f_c$  di  $L_c$  e  $f_d$  di  $L_d$ . Come detto precedentemente,  $f_c$  sarà data dalla distanza del piano della lente dal piano in cui si forma l'immagine di un oggetto posto a distanza molto maggiore di  $f_c$  (sarebbe conveniente eseguire questa misura col sole, se disponibile, ma può andar bene anche la lampada sul soffitto, salvo verificare successivamente che la sua distanza da  $L_c$  è  $\gg$  di  $f_c$ ). Per stimare  $f_d$  si pongono le due lenti a contatto e si ripete la misura della distanza focale  $f_t$  del sistema risultante, ricordando che per due lenti sottili a contatto il potere diottrico del sistema risultante è dato dalla somma dei poteri diottrici delle due lenti componenti.

Per eseguire le misure delle distanze che intervengono nelle relazioni che utilizzeremo, ci serviremo di un banco ottico per essere sicuri che le varie lenti mantengano allineati i loro assi ottici. Il banco ottico è costituito essenzialmente da un binario rigido, sul quale possono scorrere, traslando, vari cavalieri sui quali saranno posizionati i vari componenti ottici necessari all'esecuzione delle misure. Una scala millimetrica è disposta parallelamente all'asse di scorrimento per la determinazione delle varie posizioni. Uno schema del banco ottico è rappresentato in Fig.1. La prima operazione da compiere è quella dell'allineamento di tutti gli assi ottici dei vari componenti utilizzati lungo un asse parallelo a quello di scorrimento del banco ottico. Per questo scopo è montato, all'estremità del banco ottico, un diodo laser, regolabile in ogni direzione. Si tratta di allineare preliminarmente la direzione di propagazione del fascetto laser con l'asse di scorrimento del banco ottico. A tal fine, dopo aver puntato il fascetto laser sul centro della sorgente luminosa  $S$  posta all'altra estremità del banco ottico, ci serviremo di un piccolo diaframma, montato su un cavaliere con regolazioni sia in alto-basso che in destra-sinistra, che disporremo nelle immediate vicinanze della sorgente in modo da ottenere su di esso una macchia centrata del fascetto laser. Facendo scorrere il diaframma lungo l'asse di scorrimento, con poche regolazioni della posizione ed orientazione del diodo laser riusciremo a trovare la sua posizione che assicuri che la macchia luminosa del diodo laser rimanga centrata nel diaframma e quindi che il fascetto laser risulti parallelo all'asse di scorrimento del banco ottico. A questo punto allineeremo tutti i vari componenti ottici, necessari per le nostre misure, al fascetto laser (imponendo che la macchia luminosa del laser rimanga centrata in ogni componente ottico). Alla fine di queste delicate regolazioni tutti gli assi ottici dei vari componenti saranno paralleli all'asse di scorrimento del banco ottico e sovrapposti fra loro. Potremo quindi iniziare le nostre misure.

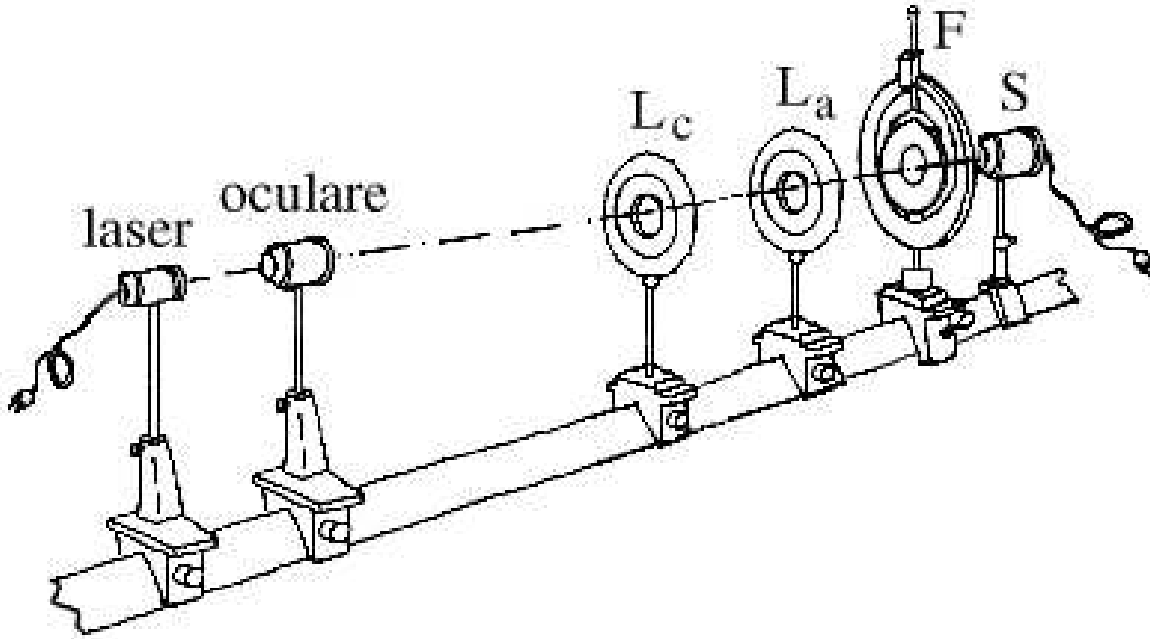


Figura 1:

## 2 Lente convergente

Potremmo pensare di utilizzare la formula dei punti coniugati per determinare  $f_c$

$$\frac{1}{p_c} + \frac{1}{q_c} = \frac{1}{f_c} \quad (1)$$

dove  $p_c$  e  $q_c$  sono rispettivamente la distanza dell'oggetto e della sua immagine da  $L_c$ . Tuttavia entrambe queste distanze sono determinate come differenze delle posizioni di cavalieri differenti (quello che porta l'oggetto, quello di  $L_c$  e quello dove si forma l'immagine). Non c'è nessuna garanzia che i piani fisici contenenti l'oggetto,  $L_c$  e l'immagine siano perfettamente allineati con lo "zero" dei noni decimali dei vari cavalieri; questa eventualità introdurrebbe offset non noti nella determinazione delle distanze  $p_c$  e  $q_c$ , che causerebbero un'errata misura di  $f_c$ . Occorre usare un metodo che permetta di misurare le distanze con lo stesso cavaliere, in modo da essere sicuri che non possano esistere effetti di offset strumentale sulle distanze misurate.

Per tale motivo, poiché la posizione del piano in cui si forma l'immagine fornita da  $L_c$  è determinata visualmente con un oculare, sarà utile usare come sorgente per  $L_c$  l'immagine reale prodotta da una lente convergente addizionale, indicata con  $L_a$  in Fig.1. Disporremo quindi davanti alla sorgente tale lente addizionale che, per non ridurre eccessivamente la lunghezza utile del banco ottico, sceglieremo di corta distanza focale. Infine, poiché utilizziamo lenti semplici, queste saranno affette da aberrazione cromatica (v. formula dei costruttori di lenti) e dovremo inserire, tra la sorgente e la lente addizionale, un filtro

interferenziale, indicato con  $F$  in Fig.1, per poter considerare la radiazione utilizzata come praticamente monocromatica.

Per determinare  $f_c$  utilizzeremo il metodo di Bessel che permette di eliminare gli effetti di possibili offset. Con riferimento alla (1), indicando con  $a = p_c + q_c$ , esprimendo  $q_c = a - p_c$  e sostituendo nella (1) otterremo

$$p_c^2 - ap_c + af_c = 0 \quad (2)$$

La (2) ha soluzioni reali se  $a \geq 4f_c$ ; se  $a > 4f_c$  si hanno due soluzioni distinte per  $p_c$ : alla prima soluzione corrisponde un valore di  $q_c (= a - p_c)$  coincidente numericamente con la seconda soluzione per  $p_c$  ed analogamente per la seconda. Questo non è altro che la riprova algebrica del principio di reversibilità del cammino ottico, nel senso che possiamo in questo caso scambiare  $p_c$  con  $q_c$ , cioè si avranno 2 diverse posizioni della lente  $L_c$  che produrranno un'immagine reale della sorgente sul piano distante  $a$ , una rimpiccolita ( $p_c > q_c$ ) e l'altra ingrandita ( $p_c < q_c$ ). Se chiamiamo con  $e$  la distanza fra queste due posizioni di  $L_c$ , avremo che  $e = q_c - p_c$ .

Conseguentemente  $p_c = (a + e)/2$  e sostituendo nella (1) avremo che

$$f_c = \frac{(a^2 - e^2)}{4a} \quad (3)$$

Utilizzeremo quindi la relazione (3) per determinare  $f_c$  in quanto le distanze  $a$  ed  $e$  non sono affette da errori di offset. Se infatti ci riferiamo alla Fig. 2, indichiamo con  $x_1$  la posizione dove si forma l'immagine reale della sorgente  $S$  (una scala numerica incisa) fornita

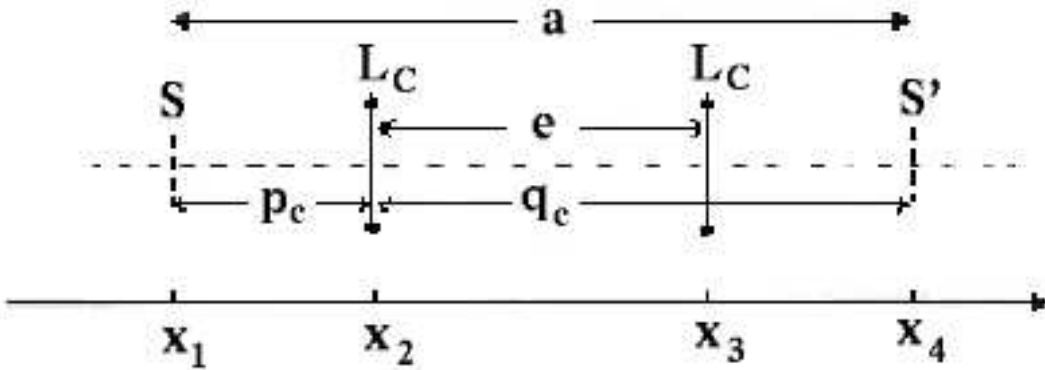


Figura 2:

dalla lente addizionale, con  $x_4$  la posizione dove si forma la successiva immagine reale  $S'$  fornita da  $L_c$ , e con  $x_2$  e  $x_3$  le due posizioni coniugate di  $L_c$ . Avremo che  $a = x_4 - x_1$  è determinata solo da posizioni dell'oculare, mentre  $e = x_3 - x_2$  è determinata solo da posizioni di  $L_c$ . Entrambe le quantità  $a$  ed  $e$  sono quindi esenti da errori di offset.

Dopo aver allineato tra loro con la massima cura gli assi ottici dei vari componenti utilizzati e parallelamente all'asse di scorrimento  $x$  del banco ottico, sperimentalmente sistemeremo la lente addizionale ed il filtro interferenziale in modo da avere un'immagine reale

della scala graduata; faremo una prima misura (anche grossolana) di questa posizione ( $x_1$ ) e metteremo successivamente l'oculare ad una distanza  $a$  ( $> 4f_c$ , stimata grossolanamente all'inizio). Controlleremo nell'oculare se si trovano facilmente le due posizioni di  $L_c$  (e saranno  $x_2$  e  $x_3$ ) che forniscono nell'oculare rispettivamente un'immagine ingrandita ed una rimpiccolita di quanto presente nel piano  $x_1$ . Il corretto allineamento di tutti i componenti ottici sarà verificato se le due immagini appariranno ambedue centrate nell'oculare; in tali condizioni potremo quindi iniziare le misure definitive di  $f_c$ .

Poiché la stima delle varie posizioni di *miglior messa a fuoco* è affetta da errori sperimentali (presenza di aberrazioni, profondità di fuoco finita e quindi oggettiva difficoltà nella stima visuale dell'immagine con maggior contrasto, ecc.) ripeteremo la determinazione di  $x_1$  alcune volte (5-6), in modo da determinare un valor medio e lo scarto massimo. Posizionando poi l'oculare in  $x_4$ , aiutandoci anche col nonio, possiamo ritenere che questa posizione sia affetta solo dall'errore di sensibilità del nonio stesso. La somma di queste due incertezze ci fornirà una stima per l'incertezza su  $a$ . Ripetendo alcune volte (5-6) le determinazioni di  $x_3$  e  $x_2$  potremo determinarne i valori medi e gli scarti massimi, la cui somma ci fornirà l'incertezza su  $e$ .

Applicando le formule di propagazione degli errori alla (3), potremo ricavare l'incertezza sperimentale su  $f_c$ , che indicheremo con  $f_{c,1}$ . Variando adesso la posizione  $x_4$  di una piccola quantità intorno al valore iniziale (si può procedere anche a passi di 5 mm), varieremo il valore di  $a$ ; misurando (una sola volta per limitazioni di tempo, da tener sempre presenti in laboratorio) i valori di  $x_3$  e  $x_2$ , otterremo il corrispondente valore di  $e$ .

Ripetendo questa procedura almeno una decina di volte, potremo alla fine ricavare una stima a posteriori del valor medio di  $f_{c,med} = \sum_{i=1}^N f_{c,i}/N$ , essendo  $N$  il numero di volte per cui abbiamo ripetuto la determinazione di  $f_{c,i}$ .

Se tutto è stato condotto correttamente, l'incertezza relativa  $\Delta f_c/f_c$  stimata inizialmente tramite la propagazione di  $\Delta a/a$  e di  $\Delta e/e$  dovrà essere dello stesso ordine della determinazione a posteriori dell'incertezza relativa su  $f_{c,med}$ .

### 3 Lente divergente

Poiché una lente divergente  $L_d$  non può formare immagini reali di oggetti reali non potremo usare il metodo di Bessel; dovremo quindi utilizzare la relazione dei punti coniugati (1) in cui, però, sia la posizione della sorgente che quella della sua immagine debbano poter essere misurate con l'oculare. La soluzione più semplice è quella indicata in Fig. 3, in cui posizioniamo  $L_d$  in  $x_5$  (cioè fra  $L_c$  e l'oculare nella configurazione di Fig. 2) e, conseguentemente, l'immagine finale si forma in  $x_6$ . In altre parole, l'immagine reale formata da  $L_c$  in  $x'_4$  rappresenta, per  $L_d$ , una sorgente virtuale, di cui  $L_d$  forma un'immagine reale in  $x_6$ . La relazione che utilizzeremo per determinare la distanza focale  $f_d$  della lente divergente sarà quindi

$$\frac{1}{f_d} = \frac{1}{q_d} - \frac{1}{p_d} \quad (4)$$

dove  $p_d$  e  $q_d$  sono le distanze (tutte positive) delle posizioni  $x'_4$  e  $x_6$  da quella ( $x_5$ ) della lente divergente. Bisogna precisare che le posizioni  $x'_3$  e  $x'_4$  riportate in Fig.3 non coin-

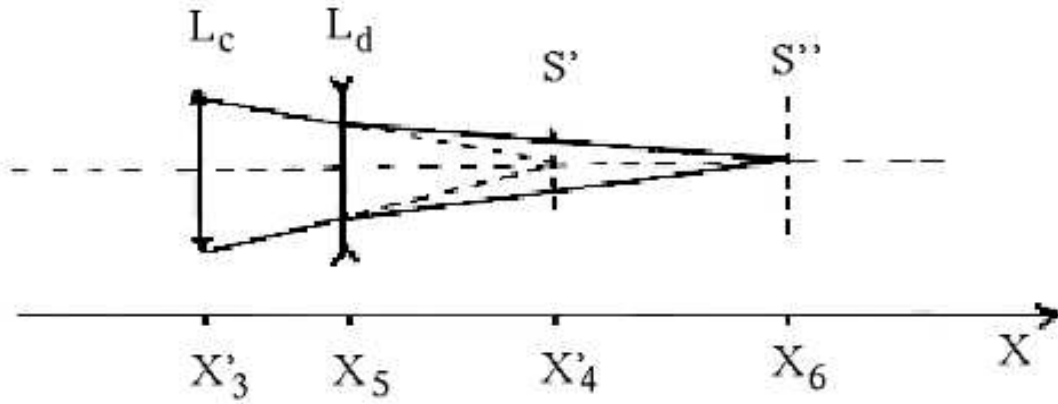


Figura 3:

cidono con quelle misurate nel caso della misura della focale della convergente, anche se sono ad esse molto vicine. Nell'attuale misura, diversamente da quanto fatto prima, posizioneremo la lente convergente in  $x'_3$  (con una incertezza pari all'errore di sensibilità del nonio) e misureremo più volte  $x'_4$ , ottenendo la corrispondente incertezza come scarto massimo rispetto al valore medio. Tale procedura è speculare di quella usata nel caso della convergente e rende le misure di  $x'_3$  e  $x'_4$  di fatto indipendenti da quelle di  $x_3$  e  $x_4$ . Si vede immediatamente che le distanze  $q_d$  e  $p_d$  sono misurate con cavalieri diversi e quindi possono essere affette da offset; per misurarlo ci serviamo della configurazione utilizzata per la misura di  $f_c$ . Supponiamo che l'eventuale offset sia presente *solo* sul cavaliere che sostiene l'oculare, cioè che non ci sia corrispondenza (entro le tolleranze di lavorazione meccanica dei supporti e cavalieri, tipicamente dell'ordine di qualche centesimo di  $mm$ ) fra il piano contenente il crocefile dell'oculare e lo zero del nonio del cavaliere. Per i cavalieri sostenenti le lenti convergente e divergente, essendo tutti i componenti in "asse" ed allineati sulla mezzeria dei cavalieri, possiamo accettare che l'eventuale offset sia inferiore alle tolleranze di lavorazione meccanica sopra dette. Questa situazione è rappresentata schematicamente in Fig. 4, dove con  $x_{1,v}$  e  $x_{1,m}$  abbiamo indicato, rispettivamente, le posizioni *vera* e *misurata* del piano in cui si forma l'immagine reale sorgente per la misura di  $f_c$ ; lo stesso vale per  $x_{4,v}$  e  $x_{4,m}$ . Abbiamo cioè considerato l'offset  $\delta$  concorde con la direzione positiva dell'asse  $x$ . Per la reversibilità del cammino ottico, il sistema deve essere simmetrico rispetto al punto medio delle distanze  $a$  ed  $e$  definite nel metodo di Bessel. In formule avremo (con riferimento alle coordinate di Fig. 4)

$$\frac{x_{4,v} + x_{1,v}}{2} = \frac{x_3 + x_2}{2}$$

dove

$$x_{1,v} = x_{1,m} - \delta \quad ; \quad x_{4,v} = x_{4,m} - \delta$$

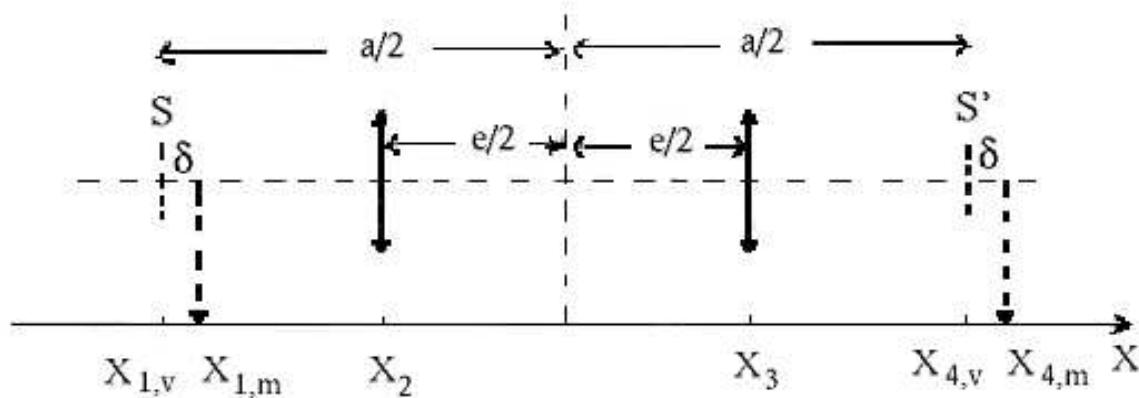


Figura 4:

Conseguentemente otterremo

$$\delta = \frac{x_{4,m} + x_{1,m}}{2} - \frac{x_2 + x_3}{2} \quad (5)$$

Dalla (4) otterremo finalmente

$$f_d = q_d \cdot \frac{p_d}{(p_d - q_d)} \quad (6)$$

con

$$p_d = x'_{4,m} - \delta - x_5 \quad ; \quad q_d = x_{6,m} - \delta - x_5 \quad (7)$$

Come risulta chiaramente dalle (7) le quantità  $p_d$  e  $q_d$  non sono indipendenti fra loro e la propagazione degli errori va fatta sulle posizioni effettivamente misurate  $x'_{4,m}$ ,  $x_{6,m}$ ,  $\delta$  e  $x_5$ . I calcoli, pur estremamente semplici, possono essere un po' lunghi e tediosi. Per una stima approssimata dell'incertezza potremo eseguire una propagazione delle incertezze sperimentali considerando come se  $p_d$  e  $q_d$  fossero fra loro indipendenti (cioè valutando  $\Delta p_d$  e indipendentemente  $\Delta q_d$  e propagandoli a  $\Delta f_d$  con la formula di propagazione dell'incertezza applicata alla (6)). Questa procedura approssimata **deve** comunque essere sempre segnalata nella relazione affinché il lettore sappia cosa rappresentano i valori ottenuti. Gli studenti sono caldamente invitati a sviluppare entrambe le procedure (quella corretta e quella approssimata) ed a riflettere sulle differenze ottenute nella valutazione delle incertezze finali su  $\Delta f_d/f_d$ .

Anche in questo caso, si possono poi eseguire una serie di misure indipendenti di  $f_{d,i}$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$ , variando di poco le posizioni  $x_{5,i}$  di  $L_d$  e misurando le corrispondenti posizioni  $x_{6,i}$  dell'immagine risultante. Questo permette di valutare a posteriori il valor medio e lo scarto massimo (o la deviazione standard se si ha un numero sufficiente di misure per

verificare che la distribuzione dei dati è gaussiana) per  $f_d$ .  
Facciamo infine notare che, per formare l'immagine reale come sorgente virtuale per  $L_d$ , è bene utilizzare una posizione  $x'_3$  coincidente numericamente con il valor medio di  $x_3$  ottenuto nella misura di  $f_c$ . Infatti in questa posizione (che fornisce in  $x'_{4,m}$  un'immagine rimpicciolata della sorgente in  $x_1$ ) l'apertura relativa del fascio luminoso che forma l'immagine è più grande di quella che si ottiene con  $L_c$  in  $x_2$ . Conseguentemente la profondità di fuoco (e quindi l'incertezza nella determinazione della relativa posizione) sarà minore nella posizione  $x'_3$  per  $L_c$ . Sarà comunque necessario che lo sperimentatore determini questa incertezza sperimentale  $\Delta x'_{4,m}$  prima di iniziare le misure con il posizionamento di  $L_d$  sul banco ottico.