

UNIVERSITA' DEGLI STUDI DI FIRENZE  
Facoltà di Scienze M.F.N.  
Corso di Laurea in Fisica

Roberto Falciani

Andrea Stefanini

**Appunti del corso di  
Esperimentazioni I**

MISURA DELL'INDICE DI RIFRAZIONE DI UN VETRO  
E VERIFICA DELLA RELAZIONE DI CAUCHY

# 1 Introduzione

Lo scopo di questa esperienza è la misura dell'indice di rifrazione relativo al passaggio dall'aria ad un vetro della luce di varie lunghezze d'onda  $\lambda$ . Utilizzeremo il metodo della deviazione minima (v. dispense di ottica) per un prisma ottico fatto del vetro in esame; indicando con  $\alpha$  l'angolo di apertura del prisma e con  $\delta_m(\lambda)$  l'angolo di deviazione minima per la radiazione di lunghezza d'onda  $\lambda$ , abbiamo che

$$n(\lambda) = \frac{\text{sen}[(\alpha + \delta_m(\lambda))/2]}{\text{sen}[\alpha/2]} \quad (1)$$

Dopo aver misurato il valore  $n_i$  a varie  $\lambda_i$  verificheremo la correttezza della relazione di Cauchy (al prim'ordine) che lega  $n_i$  con  $\lambda_i$  e cioè

$$n(\lambda) = A + \frac{B}{\lambda^2} \quad (2)$$

determinando graficamente  $A$  e  $B$  con le relative incertezze di misura.

La relazione (1) è stata determinata analizzando il comportamento di un raggio luminoso monocromatico; poiché un singolo raggio luminoso trasporta una quantità di energia infinitesima, dovremo utilizzare un fascio di raggi luminosi paralleli fra loro per poter eseguire le misure in laboratorio. Si tratta sostanzialmente di fare misure di angoli fra fasci di raggi luminosi paralleli; per questa misura ci serviremo di un particolare *goniometro*, lo spettrometro. Questo strumento (mostrato schematicamente in Fig. 1) è formato da:

- un collimatore, solidale con la struttura di sostegno, che ha il compito di rendere parallelo il fascio di raggi luminosi provenienti da una sorgente luminosa posta all'ingresso del collimatore stesso;
- una piattaforma porta-prisma, regolabile in altezza ed orientabile tramite tre viti calanti, che può ruotare attorno all'asse centrale dello spettrometro;
- un canocchiale, dotato di oculare con crocefilo, posto su una struttura che può ruotare attorno all'asse centrale dello spettrometro e solidale con due noni circolari (posti sullo stesso diametro della struttura, ma opposti rispetto al centro di rotazione), che permettono di determinare la posizione angolare del canocchiale rispetto ad una scala circolare solidale con la struttura di sostegno dello strumento.

Il collimatore è costituito da due tubi coassiali, che possono scorrere l'uno rispetto all'altro tramite un bottone godronato laterale. Il tubo esterno porta al suo estremo (rivolto all'interno dello spettrometro) un doppietto acromatico (dovendo lavorare a diverse  $\lambda$ ), mentre quello interno porta all'altro estremo (quello rivolto verso l'esterno) una fenditura lineare regolabile in larghezza tramite un'opportuna vite. Se la distanza fra il piano in cui è contenuta la fenditura ed il piano principale del doppietto coincide con la distanza focale del doppietto stesso, ogni fascio di raggi luminosi uscenti dalla fenditura sarà trasformato in un fascio di raggi luminosi paralleli all'uscita del collimatore. Notiamo che solo il fascio luminoso proveniente dal punto di intersezione dell'asse ottico del doppietto con la

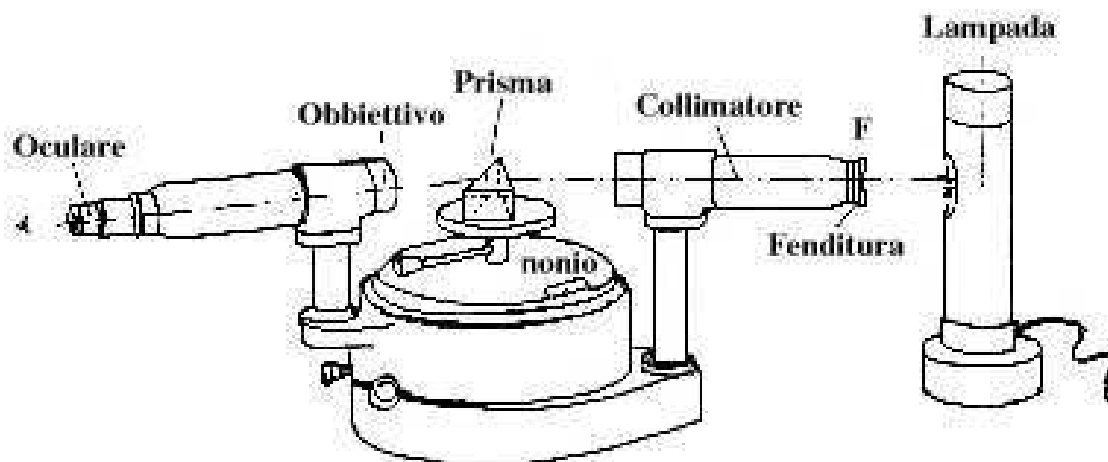


Figura 1:

fenditura proseguirà parallelo all'asse del collimatore, mentre i fasci luminosi provenienti da altri punti della fenditura proseguiranno, paralleli fra loro, ma inclinati rispetto all'asse ottico del collimatore. Lo scopo della fenditura lineare è quello di avere una sorgente luminosa con la stessa struttura geometrica (lineare) del crocefileo posto nell'oculare del cannocchiale, quindi facilmente allineabile in modo da minimizzare gli errori di puntamento. Il cannocchiale è formato da tre tubi coassiali; quello più esterno porta al suo estremo (rivolto all'interno dello spettrometro) un doppietto acromatico (generalmente gemello di quello del collimatore). Entro questo tubo può scorrere (tramite un bottone godronato) il tubo intermedio, che contiene (all'estremo rivolto all'esterno dello spettrometro) un crocefileo; il tubo interno (scorrevole rispetto a quello intermedio) porta all'estremo esterno un oculare positivo, che permette una visione ingrandita di quanto presente nel piano del crocefileo.

## 2 Sistemazione dello spettrometro

Per poter effettuare le misure occorre regolare opportunamente tutti i componenti dello spettrometro in modo da ridurre al minimo il contributo alla misura dovuto a fonti di errore sistematico. Notiamo che l'asse di rotazione dello spettrometro rappresenta un asse fisico di simmetria dello strumento; per eseguire correttamente misure di dispersione angolare  $\Delta\theta/\Delta\lambda$  (come saranno in effetti le misure di  $\delta_m(\lambda)$ ) occorre che la direzione della dispersione sia ortogonale all'asse di rotazione. La fenditura dovrà quindi essere parallela all'asse di rotazione dello spettrometro affinché le righe spettrali si formino ortogonalmente alla direzione di dispersione. Per raggiungere tale scopo e facilitare la sistemazione dello strumento disporremo la base dello spettrometro (e la piattaforma porta-prisma) in un piano orizzontale in modo che il suo asse di rotazione (e la fenditura) sia lungo la verticale.

## 2.1 Messa in opera e regolazione all'infinito del canocchiale

Si sposta l'oculare entro il tubo intermedio fino a quando non si vede ben a fuoco il crocefile (cioè l'oculare è adattato al nostro occhio). Cercheremo di controllare che le tracce *verticali* del crocefile siano effettivamente disposte lungo la verticale (aiutandosi opportunamente con un filo a piombo o una livella). Questo ci faciliterà successivamente la sistemazione della fenditura. A questo punto non si dovrà più variare la regolazione dell'oculare per tutta la durata dell'esperienza. Occorre poi regolare la distanza fra il piano principale del doppietto d'ingresso del canocchiale ed il piano dove è situato il crocefile in modo che coincida con la distanza focale del doppietto stesso (regolazione *all'infinito*). Per questo si può puntare un oggetto posto a distanza molto grande rispetto alla distanza focale del doppietto (che deve essere dell'ordine di circa 20 cm dato l'ingombro meccanico del canocchiale stesso), diciamo almeno 20 m (oltre cento volte la distanza focale)<sup>1</sup>. Si sposta il tubo intermedio rispetto a quello esterno (fisso) tramite il bottone godronato fino a che si vede ben a fuoco, sul piano del crocefile, l'immagine dell'oggetto puntato (tipicamente si apre una finestra del laboratorio e si punta un oggetto situato alla distanza voluta). Per essere sicuri che eventuali accomodamenti dell'occhio non abbiano falsato la stima della migliore messa a fuoco dell'immagine dell'oggetto puntato (e quindi che il piano focale stimato non coincida col piano in cui è contenuto il crocefile), conviene spostare di poco l'occhio nel campo dell'oculare: se l'immagine dell'oggetto ed il crocefile rimangono fermi l'uno rispetto all'altro possiamo ritenerci soddisfatti della complanarità raggiunta (metodo della parallasse). Un altro modo per regolare *all'infinito* il canocchiale è quello di utilizzare un metodo di autocollimazione che fa uso di un oculare di Gauss. Questo è fornito di un illuminatore, costituito da un sottile tubo all'interno del quale c'è una lampadina; all'estremo dell'illuminatore c'è una lastra di vetro a facce piano-parallele, inclinata di  $\pi/4$  rispetto all'asse del tubo, ed un foro che ne permette la visione dalla parte opposta del tubo. Il tubo del canocchiale portante l'oculare presenta un foro laterale nel quale va inserito l'illuminatore; la presenza della lastra di vetro trasparente permette la visione del crocefile e riflette un po' (circa il 5%) della luce proveniente dalla lampadina interna in direzione dell'asse ottico del canocchiale, illuminando così il crocefile. Ponendo sulla piattaforma porta-prisma uno specchio piano, ortogonale all'asse ottico del canocchiale, vedremo nell'oculare il crocefile illuminato e la sua immagine riflessa dallo specchio piano. Regoleremo la distanza del tubo portante il crocefile dal doppietto d'ingresso del canocchiale fino a quando risulteranno a fuoco nello stesso piano sia il crocefile illuminato che la sua immagine riflessa dallo specchio piano; questa situazione (da controllare sempre col metodo della parallasse sopra descritto) garantisce la collimazione *all'infinito* del canocchiale.

---

<sup>1</sup>Si invitano gli studenti a valutare, in questo caso, l'accuratezza relativa ottenibile per la coincidenza fra la distanza focale del doppietto e la distanza a cui si forma l'immagine dell'oggetto posto a circa 100 volte la distanza focale del doppietto stesso

## 2.2 Regolazione all'infinito del collimatore

Regolato *all'infinito* il canocchiale, lo si allinea col collimatore, dietro al quale si accende la lampada spettrale al Hg. Si regola a questo punto la distanza della fenditura d'ingresso dal doppietto del collimatore fino a quando l'immagine della fenditura apparirà nell'oculare del canocchiale ben a fuoco (si controlla facilmente questa regolazione osservando i bordi della fenditura, di cui si vedranno ben nitide tutte le irregolarità). Controlleremo sempre col metodo della parallasse la corretta complanarità dell'immagine della fenditura col crocefilo dell'oculare, ottenendo così che il fascio luminoso uscente dal collimatore sia a sua volta regolato *all'infinito*.

L'allineamento degli assi ottici del collimatore e del canocchiale è garantito dal costruttore e non può essere modificato nello spettrometro a disposizione; si può facilmente controllare la correttezza di questo allineamento utilizzando un filo posto trasversalmente al centro della fenditura e controllando che la sua immagine cada nel centro dell'oculare.

Controlleremo successivamente l'allineamento della fenditura con i tratti *verticali* del crocefilo entro il campo dell'oculare. La fenditura può essere ruotata nel proprio sostegno rispetto all'asse ottico del collimatore. Negli spettrometri di laboratorio è particolarmente delicata (e di non semplicissima esecuzione) l'operazione di sblocco, rotazione e blocco finale della direzione della fenditura, per cui si raccomanda di eseguire questa regolazione solo in caso di assoluta necessità. Allineeremo la lampada spettrale sull'asse ottico dello spettrometro aprendo la fenditura e spostando (sia in alto-basso che in destra-sinistra) la lampada spettrale in modo da vederne centrata nell'oculare l'ampolla di scarica. A questo punto la fenditura deve essere ristretta in modo da avere, una volta posizionato correttamente il prisma sulla piattaforma per l'osservazione dello spettro, una serie di immagini monocromatiche della fenditura (cioè lo *spettro* della radiazione visibile emessa dalla lampada spettrale) nel campo dell'oculare grosso modo della stessa larghezza apparente del crocefilo (per facilitare il puntamento delle varie righe spettrali) ma anche di luminosità sufficiente per poter vedere le righe (ad esempio la riga violetta a  $407.781\text{ nm}$  e quella verde scura a  $491.604\text{ nm}$  sono molto deboli e bisognerà trovare un ragionevole compromesso nella larghezza della fenditura per poterle vedere ed puntare con il crocefilo). Notiamo che le righe spettrali (immagini monocromatiche della fenditura d'ingresso dello spettrometro) non sono perfettamente lineari (come la fenditura), ma presentano una leggera concavità in direzione della base del prisma. Questa freccia è talvolta (per vetri crown a bassa dispersione) quasi inavvertibile nel piccolo campo coperto dall'oculare; per vederla conviene disporre il crocefilo tangente al punto centrale dell'immagine della fenditura e noteremo che gli estremi (superiore ed inferiore) dell'immagine saranno distanti dal crocefilo stesso. Questo effetto è dovuto al fatto che solo il fascio proveniente dal centro della fenditura attraversa il prisma in condizioni di effettiva deviazione minima (cioè in modo che i raggi luminosi attraversino il prisma ortogonalmente alla bisettrice dell'angolo di apertura del prisma stesso e simmetricamente rispetto alle facce del prisma). I fasci luminosi provenienti da punti della fenditura distanti dal centro-fenditura, propagandosi inclinati rispetto all'asse ottico dello spettrometro, incideranno sul prisma con un angolo, rispetto alla normale, maggiore di quello corrispondente alla deviazione minima e, conseguentemente, subiranno una deviazione maggiore rispetto al fascio proveniente dal

centro-fenditura, provocando quindi la freccia nella formazione della riga osservata nel piano focale del cannocchiale.

### 2.3 Regolazione della piattaforma porta-prisma

Procederemo infine alla regolazione della piattaforma porta-prisma. Questa dovrà essere disposta in modo da risultare ortogonale all'asse di rotazione dello spettrometro. Per questo porremo il prisma con lo spigolo rifrangente rivolto verso il collimatore; avendo individuato il centro della fenditura con un filo, il fascio luminoso uscente dal collimatore, giacente praticamente sul suo asse ottico, viene diviso in due fasci dalle facce del prisma che definiscono lo spigolo rifrangente del prisma stesso. Spostando il cannocchiale a destra ed a sinistra rispetto al collimatore controlleremo che le immagini del filo, posto al centro della fenditura, si formino alla stessa quota entro l'oculare. Questo significherà che lo spigolo del prisma sarà parallelo alla direzione della fenditura, che risulterà a sua volta ortogonale alla piattaforma porta-prisma (nell'ipotesi che lo spigolo del prisma sia stato costruito ortogonale alla base di appoggio del prisma sulla piattaforma porta-prisma). Se tale condizione non risulterà verificata potremo ottenerla regolando opportunamente le tre viti calanti della piattaforma porta-prisma con lo stesso criterio utilizzato per disporre orizzontalmente le basi dei catetometri.

Notiamo infine che la presenza dei due noni (situati da parte opposte dello stesso diametro dello spettrometro) permette di ridurre gli effetti di possibili errori sistematici nella misura degli angoli dovuti ad una non perfetta coincidenza (di costruzione) fra l'asse di rotazione del cannocchiale e l'asse della scala angolare di lettura degli angoli (solidale con il collimatore). Questo possibile effetto si chiama errore di eccentricità. Ogni angolo sarà misurato dalla differenza di due posizioni lette sulla scala circolare; se tale differenza risulterà la stessa, letta indipendentemente sui due noni, potremo dire che gli errori di eccentricità, se presenti, sono inferiori agli errori di sensibilità delle nostre misure. Se dovessero invece risultare leggermente diversi, gli errori di eccentricità risulteranno evidenti e la media aritmetica degli angoli misurati sui due noni risulterà essere una stima migliore per l'angolo *vero* (in quanto un angolo misurato sarà ragionevolmente una misura in eccesso e l'altro in difetto dell'angolo *vero*).

### 3 Misura dell'angolo di apertura del prisma

Si pone il prisma con lo spigolo rivolto verso il collimatore, facendo attenzione a porre lo spigolo stesso sull'asse di rotazione della piattaforma porta-prisma. Come mostrato nell'appendice, questa disposizione rende minimi possibili errori sistematici dovuti ad una non perfetta regolazione all'infinito del collimatore. Inoltre, questa sistemazione è quella che fa coincidere l'asse fisico della misura degli angoli (cioè l'asse di rotazione del canocchiale e della scala circolare) con l'asse *logico* per la definizione degli angoli (lo spigolo del prisma), che abbiamo utilizzato nell'analisi del comportamento ottico del prisma. Come illustrato schematicamente in Fig. 2, in questa situazione il fascio di raggi paralleli provenienti dal collimatore viene diviso in due parti dallo spigolo, che si rifletteranno separatamente sulle due facce laterali del prisma. L'angolo formato dai fasci riflessi risulta essere il doppio dell'angolo di apertura  $\alpha$  del prisma stesso e può essere facilmente misurato puntando col canocchiale i due fasci riflessi dalle facce laterali del prisma. Ovviamente  $\alpha$  risulterà come media dei valori misurati separatamente sui due noni dello spettrometro.

Riposizionando  $N$  volte (5-6 almeno) il prisma sulla piattaforma e ripetendo successivamente la misura dell'angolo di apertura potremo ottenere una serie di valori  $\alpha_i$  dai quali potremo ricavare un valor medio  $\alpha = \sum_{i=1}^N \alpha_i / N$  ed uno scarto massimo che assumeremo come stima dell'incertezza  $\Delta\alpha$  sulla misura di  $\alpha$ .

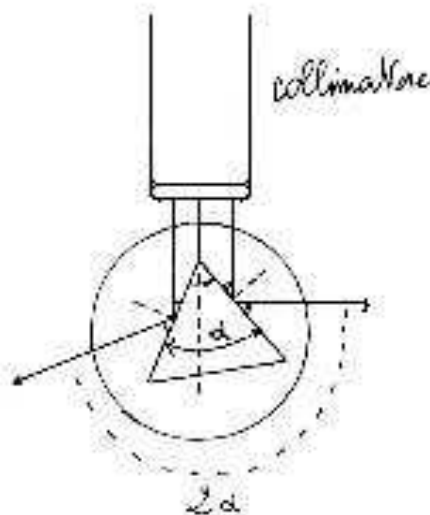


Figura 2:

### 4 Misura dell'angolo di deviazione minima

Si dispone il prisma sulla piattaforma (sempre con lo spigolo sull'asse di rotazione della piattaforma) in modo che il fascio di raggi luminosi uscente dal collimatore investa una faccia del prisma obliquamente (come, ad esempio, la posizione indicata con  $S_x$  in Fig. 3). Il fascio uscirà dal prisma nella direzione  $S_{x,c}$  nella quale posizioneremo il canocchiale per osservare lo spettro.

Consideriamo una riga dello spettro di lunghezza d'onda nota  $\lambda$ ; ruotando la piattaforma porta-prisma (cioè variando l'angolo di incidenza del fascio proveniente dal collimatore sulla faccia del prisma) vedremo muoversi la riga considerata nel campo dell'oculare del canocchiale. Esiste una posizione del prisma per la quale l'angolo di deviazione, alla  $\lambda$  considerata, assume un valore minimo; è quello per il quale continuando a ruotare la piattaforma nella stessa direzione vediamo la riga (che, nell'oculare del canocchiale, ruotava concordemente con la rotazione del prisma) fermarsi e tornare indietro. De-

terminando con la massima cura la posizione del prisma corrispondente alla stazionarietà della riga nel campo dell'oculare, puntiamo successivamente il crocifilo dell'oculare centrando la riga (operando anche con la vite micrometrica posta a controllo degli spostamenti fini del supporto del cannocchiale). Leggeremo questa posizione sui due noni dello spettrometro per ridurre eventuali effetti di eccentricità di costruzione dello spettrometro. Ripetendo tutta l'operazione col prisma nella posizione  $Dx$ , otterremo, per la stessa  $\lambda$ , la posizione  $Dx, c$  del cannocchiale corrispondente all'angolo di deviazione minima per la configurazione  $Dx$ . E' banale vedere che la differenza  $Sx, c - Dx, c = 2 \cdot \delta_m$ ; ovviamente il valore finale di  $\delta_m$  sarà dato dalla media dei valori misurati indipendentemente dai due noni dello spettrometro.

Operativamente, converrà misurare prima tutte le posizioni  $Sx, c(\lambda)$  per le righe misurabili nello spettro. Per una riga di lunghezza d'onda  $\lambda^*$  (possibilmente posta al centro dell'intervallo spettrale utilizzato) determineremo varie volte (5-6)  $Sx, c(\lambda^*)$  in modo da ottenere una stima dell'incertezza di misura tramite la determinazione dello scarto massimo rispetto alla media di questa serie di misure.

Tutta la procedura sarà ripetuta nella configurazione  $Dx$ , ripetendo anche la misura di  $Dx, c(\lambda^*)$ ; questo permetterà di ottenere una stima dell'incertezza  $\Delta\delta_m$  per la  $\lambda^*$  considerata, che considereremo rappresentativa anche per tutte le altre righe dello spettro. Questo ci consentirà un notevole risparmio di tempo non dovendo ripetere tutta la procedura per tutte le righe (come sarebbe corretto fare in una serie di misure di precisione). Dalla (1) ricaveremo, quindi, i vari valori di  $n(\lambda)$  e, tramite le regole della propagazione degli errori, le corrispondenti stime delle incertezze sperimentali  $\Delta n(\lambda)$ .

Infine, riportando in grafico i valori di  $n(\lambda)$ , con le rispettive incertezze  $\Delta n(\lambda)$ , in funzione di  $x = 1/\lambda^2$ , potremo ricavare i coefficienti  $B$  ed  $A$  dell'equazione (2) tramite la determinazione del coefficiente angolare e del termine noto della retta che meglio si adatta alla distribuzione  $n(\lambda)$  vs  $x$ . Le incertezze sui valori di  $A$  e  $B$  potranno essere valutate basandosi sulle rette di minimo e massimo coefficiente angolare (compatibilmente con i dati sperimentali) o con le procedure note per la propagazione degli errori: i due metodi dovrebbero portare a risultati per la valutazione dell'incertezza di misura confrontabili tra loro.

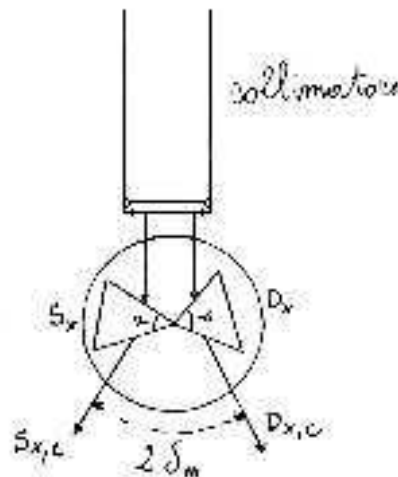


Figura 3: