

**Università degli Studi di Firenze**  
Facoltà di Scienze Mat., Fis. e Nat.  
Corso di Laurea in Fisica

Anno Accademico 1995-96

Corso di Esperimentazioni I

Dr. P. Pietrini

Appunti su:

**ROTOLAMENTO DI UNA SFERA SU UNA  
SUPERFICIE SFERICA**

# 1 Premesse e schematizzazione del moto della sferetta

Lo scopo primario dell'esperienza è quello di misurare il modulo dell'accelerazione di gravità  $g$ , studiando il moto di una sferetta che rotola su una superficie sferica concava.

In generale la sferetta può muoversi sulla superficie sia strisciando che rotolando. La descrizione del caso generale, in cui sono presenti ambedue i tipi di moto, risulta piuttosto complicata.

Se il moto della sferetta può essere sempre considerato come di puro rotolamento, esso può essere assimilato a quello di un pendolo semplice soggetto alla forza di gravità, qualora il lavoro fatto dagli attriti sia trascurabile rispetto all'energia totale della sferetta, ovvero in condizioni ideali.

La prima semplificazione che introduciamo è quindi quella di assumere che il moto della sferetta sulla superficie concava sia di **rotolamento puro** (vedremo in seguito quali condizioni dovranno essere soddisfatte perché questa ipotesi sia valida). Ricordiamo che, in tale ipotesi, la velocità del punto della sfera che tocca la superficie è istante per istante nulla, per cui l'atto istantaneo di moto della sferetta è una rotazione attorno ad un asse, istantaneamente fisso, passante per questo *punto* di contatto,  $C$ , della sferetta con la superficie, detto centro istantaneo di rotazione. In questa ipotesi, non si ha dissipazione di energia meccanica come effetto degli attriti di contatto. In realtà bisogna tenere presente che il contatto fisico avrà luogo su una *superficie* di contatto, centrata attorno a  $C$ , di estensione piccolissima rispetto alla superficie della sferetta, tale da potere essere identificata con la posizione di  $C$ . L'estensione della *superficie* di contatto sarà tanto più piccola quanto maggiore sarà la rigidità dei materiali con cui sono fatte la sferetta e la superficie concava di rotolamento. Se, effettivamente, la *superficie* di contatto si riducesse a un punto si verrebbe a creare, in questo punto, una pressione infinita, con conseguenze assurde da un punto di vista fisico.

Supponiamo inoltre che la forza d'attrito offerta dall'aria durante il moto della sferetta sia trascurabile rispetto alle altre forze in gioco.

In tali condizioni, del tutto ideali, la sferetta si muove soggetta alla forza di gravità ed alle reazioni vincolari, ma soltanto la forza peso compie lavoro, dato che le altre sono da considerarsi applicate istante per istante al centro di rotazione,  $C$ , istantaneamente fermo (velocità  $v_C = 0$ ). La conservazione dell'energia può, quindi, essere scritta in una forma molto semplice, tenendo conto del teorema di König per l'espressione dell'energia cinetica totale della sferetta (come la somma dell'energia cinetica del suo centro di massa  $G$  più l'energia cinetica relativa a  $G$  stesso).

Facendo riferimento alla Fig. 1 per le notazioni, se la sferetta è inizialmente ferma, oppure se la velocità iniziale del suo centro di massa è contenuta in un piano verticale passante per  $C$  e per  $V$ , il moto del centro di massa della sferetta è un moto piano; in questo caso, avendo supposto il rotolamento puro, le relazioni che descrivono il moto stesso possono essere scritte in termini di una singola coordinata angolare, ad esempio l'angolo di oscillazione  $\phi$  della sferetta, e delle sue derivate temporali. Prendiamo l'origine  $\phi = 0$  sulla verticale dal centro di curvatura  $O$  della superficie sferica e  $\phi$  positivo per

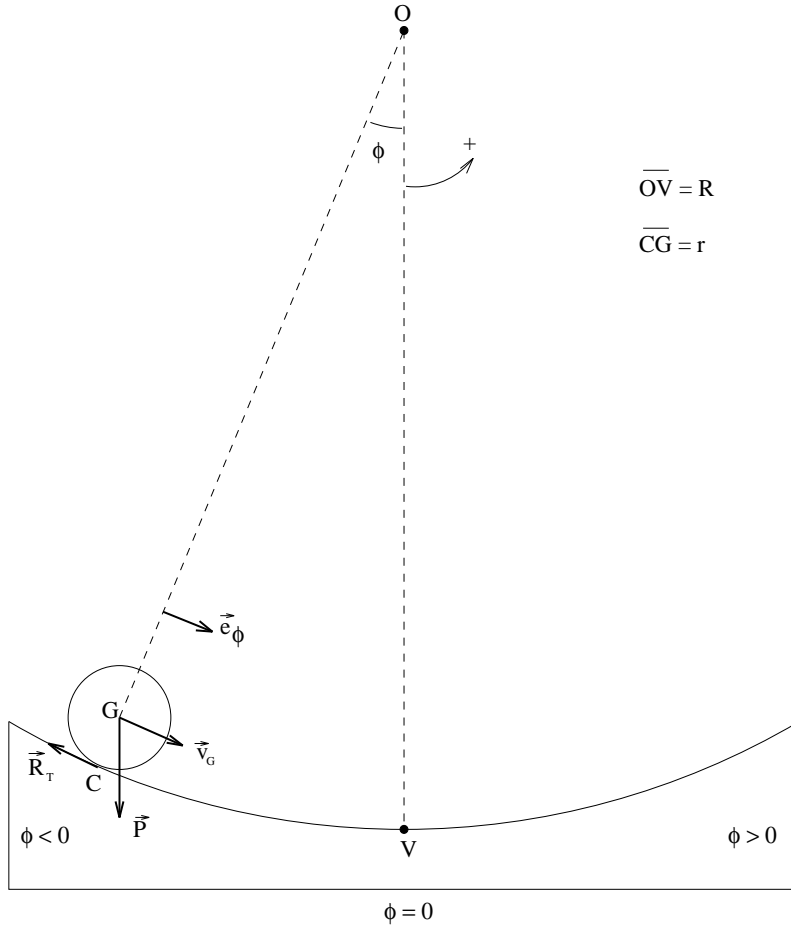


Figura 1:

spostamenti in senso antiorario a partire da tale posizione. Con questa scelta, nella configurazione riportata in Fig. 1 la velocità del centro di massa  $\mathbf{v}_G = v_G \mathbf{e}_\phi$ , dove  $\mathbf{e}_\phi$  è il versore della direzione tangenziale, risulta diretta positivamente, ovvero  $v_G > 0$ , mentre, sempre riferendosi alla Fig. 1, la velocità angolare di rotazione della sferetta,  $\omega$ , risulta negativa, dato che la sferetta rotola in senso orario. Viceversa, quando la sferetta rotola in senso antiorario (velocità angolare  $\omega$  positiva), il suo centro di massa ha velocità diretta secondo  $-\mathbf{e}_\phi$ , cioè con  $v_G < 0$ .

Sempre nelle condizioni di rotolamento puro supposte, fra la velocità del centro di massa della sferetta e la velocità angolare di rotazione della sferetta intercorre la relazione

$$\mathbf{v}_G = -\omega r \mathbf{e}_\phi, \quad \text{ovvero} \quad v_G = -\omega r, \quad (1)$$

dove  $r$  è il raggio della sferetta.

Inoltre, la velocità del centro di massa può essere espressa in funzione di  $\dot{\phi}$ , come segue

$$\mathbf{v}_G = \dot{\phi} (R - r) \mathbf{e}_\phi, \quad (2)$$

dove  $R$  è il raggio di curvatura della superficie sferica.

La relazione che esprime la conservazione dell'energia si può scrivere come

$$\frac{1}{2}mv_G^2(\phi) + \frac{1}{2}I_G\omega^2(\phi) - \frac{1}{2}mv_G^2(\phi=0) - \frac{1}{2}I_G\omega^2(\phi=0) = mg(R-r)(\cos\phi-1) \quad (3)$$

in cui le differenze di energia cinetica e potenziale sono state valutate fra la posizione angolare generica  $\phi$  e l'origine  $\phi=0$ ,  $m$  è la massa della sferetta e  $I_G = (2/5)mr^2$  è il suo momento d'inerzia baricentrico (supponendo la sferetta omogenea); tenendo poi conto delle equazioni (1) e (2), la (3) si esprime in funzione di  $\phi$  e della sua derivata rispetto al tempo, ottenendo

$$\dot{\phi}^2 - \dot{\phi}^2(\phi=0) = \frac{10}{7} \frac{g}{(R-r)} (\cos\phi - 1). \quad (4)$$

Derivando rispetto al tempo questo integrale primo del moto, si ottiene l'equazione di secondo ordine per il moto della sferetta

$$\ddot{\phi} + \left( \frac{5}{7} \frac{g}{(R-r)} \right) \sin\phi = 0, \quad (5)$$

che è l'equazione di moto di un pendolo semplice di lunghezza equivalente

$$l = \frac{7}{5}(R-r). \quad (6)$$

Il moto è periodico e il suo periodo  $T$  è in generale una funzione  $T = T(l, g, \phi_0)$ , con  $\phi_0$  ampiezza dell'oscillazione, ottenibile dalla complessa risoluzione della (5) ed esprimibile, alla fine, come uno sviluppo in serie di potenze di  $\sin(\phi_0/2)$ :

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{7(R-r)}{5g}} \left( 1 + \frac{1}{4} \sin^2 \frac{\phi_0}{2} + \frac{9}{64} \sin^4 \frac{\phi_0}{2} + o(\sin^4 \frac{\phi_0}{2}) \right). \quad (7)$$

Dalla relazione sopra scritta si può ricavare una espressione per  $g$  come funzione di quantità misurabili nell'esperienza, ovvero  $g = g(R, r, T, \phi_0)$  :

$$g = \frac{28\pi^2}{5} \frac{(R-r)}{T^2} \left( 1 + \frac{1}{4} \sin^2 \frac{\phi_0}{2} + \frac{9}{64} \sin^4 \frac{\phi_0}{2} + o(\sin^4 \frac{\phi_0}{2}) \right)^2. \quad (8)$$

in modo da poter arrivare alla stima del valore dell'accelerazione di gravità che volevamo.

Nel limite in cui le oscillazioni della sferetta possono essere considerate come *piccole oscillazioni*, cioè quando si può approssimare  $\sin\phi \sim \phi$  nella (5) su tutto l'arco delle oscillazioni (e quindi in particolare  $\sin\phi_0 \sim \phi_0$ ), l'equazione diviene quella di un moto armonico con oscillazioni *isocrone*, cioè tali che il periodo  $T_0$  è una grandezza indipendente dalla ampiezza iniziale  $\phi_0$  delle oscillazioni stesse ed è dato da

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} = 2\pi \sqrt{\frac{7(R-r)}{5g}}. \quad (9)$$

$\phi_0(^{\circ})$	$\phi_0(\text{rad})$	$\sin \phi_0$	$\Delta\%$	$\sin^2(\phi_0/2)/4$
5	0.0873	0.0872	0.1	$4.8 \times 10^{-4}$
10	0.1745	0.1736	0.5	$1.9 \times 10^{-3}$
15	0.2618	0.2588	1.2	$4.3 \times 10^{-3}$
20	0.3491	0.3420	2.1	$7.5 \times 10^{-3}$
25	0.4363	0.4226	3.2	$1.2 \times 10^{-2}$

Tabella 1:  $\Delta \equiv (\phi_0(\text{rad}) - \sin \phi_0) / \sin \phi_0$

Conseguentemente, la stima di  $g$  in questo caso passa attraverso la relazione

$$g = \frac{28\pi^2 (R - r)}{5 T_0^2}. \quad (10)$$

L'applicazione dell'approssimazione delle piccole oscillazioni comporta quindi, nella sua semplicità, un'approssimazione nella relazione che lega il periodo dell'oscillazione  $T$  agli altri parametri dell'esperienza ( $R, r, g, \phi_0$ ). Confrontando la (7) con la (9) e limitandoci a considerare solo il primo termine dello sviluppo in serie di potenze di  $\sin(\phi_0/2)$ , vediamo che l'approssimazione relativa nella stima del periodo di oscillazione è data da  $(T - T_0)/T_0 \simeq 1/4 \sin^2(\phi_0/2)$ . Dai dati riportati in Tabella 1 si vede che, ad esempio per  $\phi_0 = 10^\circ$ , l'approssimazione di piccole oscillazioni porta ad una valutazione di  $T$  con uno scarto relativo dello 0.2%, mentre per  $\phi_0 = 25^\circ$  lo scarto relativo arriva a 1.2%. Notiamo che la stima dello scarto relativo su  $T$  non è influenzata dall'aver trascurato il termine del secondo ordine dello sviluppo in serie, cioè  $(9/64) \sin^4(\phi_0/2)$ . Infatti il suo valore, anche per il massimo valore previsto per  $\phi_0$  ( $\phi_0 = 25^\circ$ ) nell'esperienza, è di  $3 \times 10^{-4}$  e risulta sempre inferiore alla precisione relativa con la quale tipicamente si riescono a misurare i periodi di oscillazione nella configurazione attuale dell'esperienza ( $\sim 1 \div 3 \times 10^{-3}$  come vedremo meglio nel seguito). Se avessimo avuto a disposizione un apparato sperimentale capace di misurare i periodi di oscillazione con una precisione relativa dell'ordine di  $10^{-4}$ , questo termine non avrebbe potuto essere trascurato nelle nostre valutazioni.

Dal punto di vista sperimentale, per un dato valore dell'ampiezza iniziale  $\phi_0$ , l'opportunità e la correttezza di una scelta fra la descrizione in termini di "piccole oscillazioni" e quella generale dipende dunque dalla precisione del metodo di misura del periodo. È chiaro, infatti, che, sempre considerando il caso  $\phi_0 = 10^\circ$ , se non siamo in grado di effettuare una misura del periodo affetta da una incertezza relativa  $\Delta T/T$  inferiore allo 0.2%, non è necessario mantenere e considerare i termini dello sviluppo nella (7) successivi all'ordine zero, che corrisponde appunto alla descrizione in termini dell'approssimazione di piccole oscillazioni.

## 2 L'esperienza in laboratorio

Dalla misura del raggio  $r$  della sferetta che si lascia rotolare, del raggio di curvatura  $R$  della superficie sferica, del periodo di oscillazione della sferetta e, in generale, dell'am-

piezza iniziale dell'oscillazione  $\phi_0$ , si può ottenere una stima dell'accelerazione di gravità  $g$ , utilizzando la relazione (8) o la (10) secondo i criteri precedentemente esposti. Queste misure saranno discusse in dettaglio nei paragrafi successivi.

## 2.1 Descrizione dell'apparato di misura

In laboratorio abbiamo a disposizione:

a) sfere metalliche omogenee di raggio  $r$ ;  
b) una superficie sferica concava, di metallo, con raggio di curvatura  $R$ . Sulla calotta sferica sono state incise dal costruttore alcune divisioni lungo la fascia centrale su cui si deve fare rotolare la sferetta. Le divisioni forniscono una scala di lettura per l'ampiezza delle oscillazioni sulla superficie e sono posizionate in modo tale che la distanza fra due divisioni successive corrisponde ad una ampiezza angolare, sottesa da raggi passanti per il centro di curvatura  $O$  della superficie sferica, pari a  $2^\circ 30'$ .

È possibile scegliere con buona approssimazione l'ampiezza iniziale delle oscillazioni,  $\phi_0$ ,  $\phi_0(^{\circ}) = n \times 2^\circ 30'$ , lasciando andare la sferetta metallica dalla  $n$ -esima divisione a partire dal vertice  $V$  della calotta sferica.

Su una corda giacente nel piano passante per il vertice  $V$  e perpendicolare alla traiettoria (idealmente piana nelle nostre ipotesi) della sferetta, sono posti un emettitore e un ricevitore per radiazione infrarossa. Il passaggio della sferetta per  $V$  interrompe il flusso di radiazione sul ricevitore, il cui segnale di oscuramento rappresenta il segnale di start e stop per un cronometro elettronico;

c) cronometro elettronico capace di misurare 4 o 7 periodi di oscillazione della sferetta con errore di lettura variabile da  $10^{-2}$  a  $10^{-6}$  s;  
d) cronometro manuale, con errore di sensibilità pari a 0.01 s;  
e) calibro lineare ventesimale;  
f) calibro palmer centesimale;  
g) sferometro per la misura del raggio di curvatura della superficie sferica concava.

(Si rimanda al par. 1.11 degli Appunti su “Misure in Fisica, equazioni dimensionali e sistemi di unità di misura” [ R.Falciani, A.Stefanini a.a. 2002-2003] per maggiori dettagli sugli strumenti e), f), g).)

## 2.2 Misura del raggio $r$ della sferetta

Questa misura si ottiene da quella del diametro della sferetta stessa, da effettuarsi con il palmer (o con il calibro ventesimale), facendo, al solito, attenzione a eliminare eventuali effetti sistematici presenti; allo scopo di verificare la sfericità della pallina è opportuno ripetere la misura su vari diametri  $d$  e determinare, di conseguenza, l'incertezza  $\Delta d$ .

## 2.3 Misura del raggio di curvatura $R$ della calotta sferica

La stima di  $R$  si ricava dalla misura dell'interdistanza fra i piedini dello sferometro  $a$ , caratteristica di costruzione dello strumento, e della freccia di dislivello,  $h$ , del puntale

centrale tra un piano di riferimento e la superficie sferica. Da tali misure è possibile ricavare  $R$  secondo la relazione

$$R = \frac{a^2/3 + h^2}{2h}. \quad (11)$$

Per la misura di  $a$ , è importante considerare che i piedini dello sferometro identificano i vertici di un triangolo equilatero solo se lo sferometro è costruito perfettamente. In laboratorio occorrerà controllare con quale grado di precisione l'equidistanza tra i piedini dello sferometro è verificata, pesando in uguale misura i tre lati nella stima di  $a$ .

## 2.4 Misure del periodo $T$

In generale, conviene misurare l'intervallo di tempo relativo a un certo numero di oscillazioni successive, in modo da ridurre l'incertezza relativa sulle misure del periodo di oscillazione dovuta alla indeterminazione (comunque presente con entrambi i cronometri a disposizione in laboratorio) nell'apprezzamento dell'istante di inizio e fine dell'intervallo di tempo che si intende misurare con il cronometro. La partenza e l'arresto del cronometro sono "azionati" dal passaggio della sferetta da un riferimento predeterminato. Si capisce immediatamente che, per introdurre la minore incertezza sull'intervallo di tempo da misurare, occorre porre il riferimento nella posizione in cui la sferetta ha la massima velocità, cioè al suo passaggio per il vertice  $V$  della superficie concava. Si conviene poi di effettuare le misure per 4 e per 7 oscillazioni; infatti, misurare la durata di  $n < 4$  oscillazioni non porta vantaggio apprezzabile nella riduzione dell'incertezza relativa sul periodo, mentre misurare la durata di un numero troppo elevato di oscillazioni porterebbe un vantaggio solo illusorio, dato che all'aumentare di  $n$  aumentano gli effetti dissipativi cumulativi causati dalla presenza di attriti, come discuteremo nel seguito.

Il periodo di oscillazione  $T$  dipende anche dall'ampiezza iniziale dell'oscillazione,  $\phi_0$ , secondo la descrizione quantitativa fatta precedentemente, nella quale si introducevano però ipotesi semplificatrici di notevole importanza (rotolamento puro, lavoro degli attriti trascurabile, moto piano), la cui validità sarà discussa nel paragrafo 2.5.

Con gli strumenti disponibili in laboratorio possiamo realizzare le seguenti misure.

### a) Misure con il cronometro manuale

Dovranno essere misurati i periodi di oscillazione corrispondenti a diversi valori dell'ampiezza iniziale  $\phi_0$ ; si dovrà verificare se le misure dei diversi periodi  $T(\phi_0)$  risultano significativamente diverse nell'ambito delle incertezze sperimentali ottenibili col cronometro manuale. L'incertezza sperimentale può essere confrontata con il valore dei termini correttivi del primo ordine riportati in Tabella 1. Se si conclude che con il cronometro manuale non è possibile misurare l'anisocronismo delle oscillazioni, dovremo usare la relazione (10) per la determinazione di  $g$ , valida nell'ipotesi di "piccole oscillazioni", dando così una descrizione fisica di prima approssimazione del fenomeno in studio.

Se vogliamo raffinare la descrizione del fenomeno fisico (moto della sferetta), dobbiamo misurare  $T$  con una precisione più elevata (cronometro elettronico e fotocelle).

## b) Misure con il cronometro elettronico e fotocelle

Da quanto visto nel paragrafo 1., l'utilizzo del cronometro elettronico per le misure del periodo  $T$  di oscillazione dovrebbe consentire di rilevare quantitativamente l'anisocronismo di oscillazioni di diversa ampiezza iniziale. Questo è reso possibile fondamentalmente dal fatto che il cronometro elettronico è, come già notato, azionato dall'interruzione del segnale fra emettitore e ricevitore a radiazione infrarossa posti sulla calotta, dovuto al passaggio della sferetta, il che consente di diminuire l'incertezza sulla partenza e l'arresto del cronometro rispetto all'azionamento manuale.

In linea di principio, l'esperienza che stiamo discutendo presenta quindi anche un altro aspetto di interesse fisico non secondario, quale la possibilità di studiare l'anisocronismo di oscillazioni di ampiezza iniziale non considerabile come "piccola", cioè la dipendenza del periodo dal valore dell'ampiezza stessa. Una possibile applicazione grafica di interesse può essere ottenuta riportando i valori dei periodi misurati,  $T(\phi_0)$ , in funzione del corrispondente termine correttivo del primo ordine  $\sin^2(\phi_0/2)/4$ . Si deve verificare una dipendenza di tipo lineare in cui sia il coefficiente angolare che l'intersezione con l'asse delle ordinate (periodi) della retta ottenuta rappresentano il valore di  $T_0$ , periodo del limite di piccole oscillazioni. Ricavato  $T_0$ , tramite la relazione (10) è possibile determinare il valore di  $g$ , conoscendo le altre grandezze che compaiono nella (10) stessa. Alternativamente, avendo ottenuto valori  $T(\phi_0)$  che risultano significativamente diversi, rispetto alla precisione della loro misura, a seconda del valore dell'ampiezza iniziale, si può ricavare una stima di  $g$  da ciascuno dei  $T(\phi_0)$ , utilizzando invece la relazione fra  $T$  e  $g$  che include anche gli effetti di anisocronismo, ovvero la relazione (8), in cui si considera la correzione per l'ampiezza. Le diverse stime di  $g$  così ottenute devono risultare fra loro compatibili.

Questo studio del moto oscillatorio della sferetta risulta in laboratorio possibile almeno qualitativamente; tuttavia, una corretta quantificazione degli effetti di anisocronismo può rivelarsi difficile, a causa della presenza di diversi fattori di disturbo e complicazioni nel moto reale della sferetta rispetto alla semplice schematizzazione del moto presentata precedentemente.

## 2.5 Effetti di disturbo presenti nel moto reale

### a) Imperfezioni della calotta sferica concava

Per quanto accuratamente lavorata, la sfericità della calotta su cui si fa rotolare la sferetta può non essere perfetta; lo studente dovrà controllare in laboratorio tale sfericità, misurando sistematicamente, con accuratezza, la freccia  $h$  lungo tutta la fascia su cui la sferetta rotola, all'altezza delle diverse divisioni riportate. Se si evidenziasse una dipendenza, al di fuori delle incertezze sperimentali, del valore misurato della freccia  $h$  dalla posizione sulla calotta, la sfericità non sarebbe perfetta, cioè il raggio di curvatura  $R$  non sarebbe lo stesso in ogni porzione di calotta sferica

su cui la sferetta si muove. Questo introdurrebbe un fattore di discrepanza del moto effettivo della sferetta da quello semplice con cui abbiamo schematizzato il problema fisico, di difficile descrizione quantitativa.

b) Modalità sperimentali nella misura del periodo

Per potere sfruttare al meglio le potenzialità di precisione nella misura del periodo col cronometro elettronico, è comunque necessario cercare di mettersi nelle condizioni più vicine possibile a quelle del moto oscillatorio piano sopra descritto. Come accorgimenti pratici, quindi, sarà necessario fare attenzione a quanto segue:

i) posizione da cui si lascia andare la sferetta; occorre sempre centrarla con cura sulla posizione della divisione corrispondente alla ampiezza iniziale scelta, in modo da rendere l'oscillazione da studiare il più possibile riproducibile;

ii) modo in cui si lascia andare la sferetta; essa deve essere posizionata al centro del percorso consentito per la sua traiettoria, la quale, ricordiamo, dovrà risultare piana e ortogonale alla linea di vista fotodiodo-rivelatore. Il posizionamento della sferetta sarà effettuato trattenendola manualmente; al momento del rilascio occorrerà avere cura di non imprimere alcuna componente di velocità iniziale sulla sferetta. È particolarmente facile rendersi conto della presenza di una componente di velocità iniziale ortogonale al piano "meridiano" di moto, perché, in tal caso, la traiettoria della sferetta avrà un aspetto "quasi-ellittico"; in queste condizioni il moto sarebbe equivalente a quello di un pendolo sferico, la cui trattazione va oltre i limiti di questa esperienza (cfr. Mandò, Esercizi di Fisica);

iii) mantenimento di un buon grado di pulizia di sferetta e calotta strofinandole con un fazzolettino imbevuto di alcool;

iv) valutazione dello smorzamento nell'intervallo di tempo di misura (pari a  $4T$  o a  $7T$ ), osservando l'ampiezza dell'oscillazione al termine dell'intervallo di tempo misurato [vedi paragrafo c) seguente].

c) Presenza di attriti

Pur con la maggior cura possibile da parte dello studente, osservando attentamente l'ampiezza di oscillazioni successive della sferetta, è possibile notare che si ha una apprezzabile riduzione dell'ampiezza dopo la prima oscillazione (almeno per ampiezze  $\gtrsim 20^\circ$ ), mentre per le oscillazioni successive, è sempre presente una diminuzione di ampiezza, ma in misura minore e più graduale. Questo significa palesemente che, comunque, sono presenti forze d'attrito che dissipano energia meccanica. Occorre quindi esaminare come e quanto questi effetti possano influire sui risultati ottenuti nel paragrafo 1 nell'ipotesi di assenza di fenomeni dissipativi.

Possiamo individuare, qualitativamente, fra le possibili cause di fenomeni dissipativi, l'azione

- della resistenza dell'aria.
- dell'attrito radente,
- dell'attrito volvente.

In Appendice riportiamo una più dettagliata analisi degli attriti nel moto della sferetta e dei loro effetti. Da tale trattazione segue che possiamo ritenere trascurabile la resistenza dell'aria sulla sferetta metallica che utilizziamo in laboratorio, rispetto agli attriti di contatto. Inoltre, per le caratteristiche del materiale di cui sferetta e superficie concava sono fatte (acciaio-acciaio), gli attriti di contatto, pur avendo effetti osservabili in laboratorio sulla ampiezza delle oscillazioni, non influenzano in maniera sensibile, rispetto alla precisione della misura, il periodo della oscillazione  $T$ ; questo vale anche qualora  $T$  dipenda dalla ampiezza iniziale delle oscillazioni. Questo è importante ai fini della esperienza in laboratorio, dato che ci consente di utilizzare ancora le relazioni (8) e (10), ricavate per il caso di moto ideale, allo scopo di stimare il modulo dell'accelerazione di gravità  $g$ .

### 3 Stima Finale di $g$ e Considerazioni Conclusive

Vediamo anzitutto in quali condizioni è necessario considerare la dipendenza di  $T$  da  $\phi_0$  (eq. 7) e quando, invece, possiamo limitarci alla semplificazione delle “piccole oscillazioni” (e usare l'espressione di  $T = T_0$  data dalla eq. 9). Per prendere tale decisione, al solo fine della stima di  $g = g(r, R, T, \phi_0)$ , ci dobbiamo confrontare con la precisione ottenuta nelle misure di lunghezza precedentemente descritte. Se le incertezze relative con cui sono determinati il raggio  $r$  della sferetta e il raggio di curvatura della calotta sferica  $R$  sono maggiori dei termini correttivi al periodo  $T$ , dovuti alla sua dipendenza da  $\phi_0$ , potremo accontentarci di eseguire una misura “meno precisa” del periodo di oscillazione (cronometro manuale), utilizzando poi per la valutazione di  $g$  l'equazione (10).

In caso contrario, e ogniqualvolta si effettuino misure con il cronometro elettronico, tenendo presenti le considerazioni fatte nel paragrafo 1, per ogni valore di  $T(\phi_0)$  misurato con il cronometro elettronico, otterremo, tramite la relazione (8), una stima di  $g$ .

Per la stima dell'errore relativo su  $g$  si ottiene

$$\frac{\Delta g}{g} = \frac{\Delta R}{(R - r)} + \frac{\Delta r}{(R - r)} + 2\frac{\Delta T}{T} + \frac{\sin \phi_0}{4 \left[ 1 + \frac{\sin^2(\phi_0/2)}{4} \right]} \Delta \phi_0, \quad (12)$$

dove l'ultimo termine tiene conto di una possibile incertezza sulla valutazione dell'ampiezza iniziale della oscillazione.

Lo studente dovrà determinare il contributo relativo dei vari addendi della eq. (12), stimando quali sono i termini più significativi nell'incertezza su  $g$ . Se le procedure di misura sono state seguite correttamente, ci si aspettano stime di errore molto simili da associare ai singoli valori di  $g$  ricavati dalle varie serie di misure; qualora così non fosse, c'è da chiedersi perché e tentare di giustificarlo. In tal caso, la stima finale che si darà di  $g$  potrà essere quella corrispondente alla minore incertezza, cioè la migliore determinazione. Se, viceversa, i  $(\Delta g)_i$  sono sostanzialmente uguali per ogni serie  $i$  di misure, la stima finale di  $g$  può essere data dalla media dei vari  $g_i$  con incertezza  $\Delta g \simeq (\Delta g)_i$ .

## Appendice

### Effetti degli attriti sul moto della sferetta

Gli effetti di dissipazione dell'energia meccanica a causa dell'attrito di strisciamento sono particolarmente sensibili in un possibile transiente di slittamento nel moto incipiente della sferetta, che si può osservare (come vedremo in seguito) quando la sferetta viene lasciata andare da un angolo  $\gtrsim 20^\circ$ . In questa fase del moto, e ogni volta che la velocità della sferetta si annulla raggiungendo la massima elongazione (quando questa è comunque  $\gtrsim 20^\circ$ ), prima che si stabilisca il rotolamento, la sferetta tende a strisciare sulla superficie: il punto di contatto della sferetta fra la sferetta stessa e la superficie concava ha velocità non nulla e la componente tangenziale della forza di reazione della superficie, di modulo  $|R_T|$ , compie lavoro, con conseguente dissipazione di energia meccanica; se  $f$  è il coefficiente statico di attrito radente (che per contatto metallo-metallo è tipicamente  $f \simeq 0.15 \div 0.20$ ), si ha  $|R_T| \leq fmg \cos \phi$ . La massima forza che può essere esercitata dalla superficie di contatto è quindi  $fmg \cos \phi$ , dove  $\phi \simeq \phi_0$ , ed oltre un certo angolo non è più sufficiente ad assicurare il rotolamento. Per illustrare più chiaramente questo fatto, facciamo ancora riferimento alla Fig. 1 e alle notazioni in essa introdotte. Supponendo di avere appena lasciato andare la sferetta da una condizione iniziale di quiete, possiamo scrivere le equazioni cardinali rilevanti come segue

$$\begin{cases} m(R-r)\ddot{\phi} = -mg \sin \phi + R_T \\ I_G \dot{\omega} = rR_T + M_v. \end{cases} \quad (13)$$

$M_v$ , come discuteremo in dettaglio nel seguito, è un momento di forze, in opposizione al moto di rotolamento della sferetta, con cui si schematizza empiricamente l'azione dell'attrito volvente e risulta  $|M_v| \ll |rR_T|$  (come si giustificherà più avanti). Considerando sempre a scopo esemplificativo la configurazione rappresentata nella Fig. 1, in cui il verso positivo della direzione tangenziale è quello indicato dal versore  $\mathbf{e}_\phi$ , in questo caso specifico  $R_T$  ha valore negativo e, conseguentemente, tenuto conto delle considerazioni fatte sopra su  $M_v$ , dalla seconda delle equazioni (13) si ha  $\dot{\omega} < 0$ . Dalle equazioni (13) si può ricavare (vedere referenza [1]) l'espressione formale per l'accelerazione di trascinarsi del punto di contatto  $C$ ,  $\dot{v}_C$ , che risulta

$$\dot{v}_C = -g \sin \phi + \frac{7}{2} \frac{R_T}{m} + \frac{5}{2} \frac{M_v}{mr}; \quad (14)$$

facendo sempre riferimento alla configurazione illustrata in Fig. 1, si riconosce che il primo termine a secondo membro è positivo ( $\phi < 0$ ), così come il terzo ( $M_v$  ha segno opposto a  $\omega$ ), ma quest'ultimo è molto piccolo rispetto agli altri termini. Si comprende così come il termine in  $R_T$ , negativo nella presente esemplificazione, sia determinante per garantire una condizione di rotolamento puro; infatti<sup>[1]</sup> nel caso di rotolamento puro occorre sia verificata l'uguaglianza  $\dot{v}_C = 0$ , per potere, istante per istante, mantenere  $v_C = 0$  ( $C$  è il centro istantaneo di rotazione della sferetta), e la condizione suddetta sarà effettivamente realizzabile solo entro un certo valore dell'angolo  $\phi_0$  di partenza, dato che  $|R_T|$  ( $\leq fmg \cos \phi$ ) diminuisce con il crescere dell'angolo.

Si capisce dunque come il possibile effetto di strisciamento dipenda dall'ampiezza iniziale delle oscillazioni, risultando tanto maggiore quanto questa è maggiore, ovvero quanto maggiore è l'inclinazione locale della superficie nel punto in cui la sferetta viene lasciata andare. In laboratorio, osservando l'ampiezza massima raggiunta dopo la prima oscillazione, si vedrà come per ampiezze di  $20^\circ$  o  $25^\circ$  la dissipazione per attrito radente possa essere significativa, mentre per ampiezze minori, ad esempio per  $10^\circ$ , sia praticamente inesistente.

L'attrito radente, tuttavia, per quanto produca effetti osservabili sulla ampiezza delle oscillazioni, almeno per  $\phi_0$  abbastanza alti, risulta non avere globalmente una influenza significativa sul moto oscillatorio, almeno per quanto riguarda il periodo, nelle condizioni sperimentali a disposizione. Infatti, la sua azione si esplica esclusivamente in un intervallo di tempo molto piccolo rispetto alla durata delle 4 o 7 oscillazioni che viene misurata. In questo senso è significativo il fatto che, effettuando misure del periodo su 4 e 7 oscillazioni a partire da una data ampiezza iniziale, non si evidenziano differenze del valore di  $T$  ottenuto, che non rientrino nell'errore sperimentale.

In regime di rotolamento, si ha ancora una certa dissipazione di energia meccanica come effetto dell'attrito volvente; nonostante la piccola entità di questa forma di attrito per il contatto metallo-metallo, in linea di principio l'attrito volvente risulta nel caso in esame il fenomeno di dissipazione di maggiore interesse, in quanto continua la sua azione durante tutto il moto oscillatorio.

L'origine del fenomeno di attrito volvente risiede nel fatto che i corpi a contatto, sferetta e superficie concava, non sono perfettamente rigidi, per cui la zona di contatto non è perfettamente puntiforme, come ipotizzato nel caso ideale. I corpi a contatto subiscono, cioè, una pur piccolissima deformazione, di carattere non perfettamente elastico, in modo che le reazioni di deformazione nella zona di contatto non risultano distribuite in modo completamente simmetrico intorno al punto di contatto medio,  $\bar{C}$ ; il sistema di reazioni che si ingenera ha un effetto che può essere schematizzato come un momento di forze di modulo  $|M_v|$ , che si oppone al moto, dissipando energia meccanica. Questo momento risulta empiricamente essere proporzionale alla forza con cui la sferetta comprime il piano d'appoggio e quindi esprimibile come  $|M_v| = \rho mg \cos \phi$ , dove  $\rho$  è detto *coefficiente di attrito volvente*, ha le dimensioni di una lunghezza e dipende sostanzialmente dalla natura delle superficie a contatto e dal raggio della sferetta. In generale, si fornisce il valore della quantità adimensionale  $\rho/r$ , che è sostanzialmente indipendente dal raggio  $r$  della sferetta e, nel caso di contatto acciaio-acciaio, è tipicamente  $\rho/r \simeq (1. \div 5.) \times 10^{-3}$ . Confrontando  $\rho/r$  col coefficiente di attrito radente  $f$ , si può verificare il fatto che gli effetti di dissipazione dovuti all'attrito volvente sono molto più piccoli di quelli che si avrebbero se un corpo di acciaio strisciasse su una superficie dello stesso materiale: la differenza fra i due coefficienti adimensionali è infatti di circa due ordini di grandezza e

$$\left(\frac{dL}{d\phi}\right)_{rad} / \left(\frac{dL}{d\phi}\right)_{vol} \geq \frac{f}{(\rho/r)},$$

indicando con  $L$  il lavoro compiuto dagli attriti.

Per completezza, a questo punto siamo in grado, tornando alla eq. (14), di valutare più quantitativamente le condizioni in cui, per contatto acciaio-acciaio, ci possiamo aspet-

tare di avere con buona approssimazione rotolamento puro, senza strisciamento; a questo scopo, ponendo nella (14)  $\dot{v}_C = 0$  (accelerazione di strisciamento nulla) si ottiene

$$R_T = \frac{2}{7} \left[ mg \sin \phi - \frac{5}{2} \frac{M_v}{r} \right],$$

ovvero, sempre riferendosi alle condizioni schematizzate nella fig. 1 per il moto incipiente della sferetta, e, tenendo conto delle limitazioni sulla reazione tangenziale che la superficie di contatto può fornire,

$$\frac{2}{7} \left[ mg \sin |\phi| + \frac{5}{2} \frac{\rho}{r} mg \cos \phi \right] \leq f mg \cos \phi,$$

da cui

$$\tan |\phi| \leq \frac{7}{2} f - \frac{5}{2} \frac{\rho}{r}; \quad (15)$$

quest'ultima è la condizione che definisce l'angolo entro il quale si può instaurare effettivamente rotolamento puro, nel moto incipiente, in funzione dei coefficienti d'attrito. Ricordando che ci troviamo in condizioni dinamiche e che quindi il valore di  $f$  è inferiore a quello in condizioni statiche, possiamo dare una stima, anche se solo indicativa, dell'angolo limite, prendendo  $f \simeq 0.1$  e  $\rho/r \simeq 0.0015$  e ottenendo un valore per l'angolo di circa  $20^\circ$ .

Vediamo adesso che tipo di effetti ci possiamo aspettare sul moto reale della sferetta a causa dell'attrito volvente. Il lavoro compiuto dalla coppia di forze con cui schematizziamo l'attrito volvente nello spostamento angolare  $\alpha$  della sferetta, si può esprimere come  $L_{volv}(\alpha) = \int_0^\alpha |M_v| d\alpha'$  dove  $\alpha = s/r$ , quando il centro della sferetta si è spostato compiendo un percorso di lunghezza totale  $s$ . L'energia meccanica totale della sferetta al termine di ogni oscillazione completa diminuisce in ragione della energia meccanica dissipata per l'attrito volvente ed è data comunque da  $E_{tot} = mg(R-r)(1 - \cos \phi_{0n})$ , se indichiamo con  $\phi_{0n}$  l'ampiezza massima raggiunta dalla sferetta dopo la  $n$ -esima oscillazione, risultando quindi una funzione di  $n$ . Dopo un numero  $n$  di oscillazioni complete, lo spostamento angolare totale è

$$\alpha \simeq \frac{4\phi_0(R-r)n}{r},$$

dove si è approssimato  $\phi_{0n} \sim \phi_0$ , avvalendosi del fatto che ci si aspetta che il fenomeno dissipativo sia di piccola entità. In assenza di altri effetti dissipativi rilevanti, si può scrivere

$$\frac{\Delta E_{tot}}{\Delta n} = - \frac{\Delta L_{volv}(n)}{\Delta n} \simeq - \frac{\Delta(\overline{|M_v|}\alpha(n))}{\Delta n}, \quad (16)$$

dove  $\overline{|M_v|}$  è il momento d'attrito volvente medio su una mezza oscillazione, dato da

$$\overline{|M_v|} = \rho mg \overline{\cos \phi} = \rho mg \frac{\sin \phi_{0n}}{\phi_{0n}}.$$

In prima approssimazione, trascuriamo anche nel momento medio la variazione della ampiezza massima con  $n$ , per cui poniamo

$$\overline{|M_v|} \simeq \rho mg \frac{\sin \phi_0}{\phi_0}.$$

La (16) diviene così

$$\frac{\Delta E_{tot}}{\Delta n} \simeq -\frac{\Delta[4\rho mg \sin \phi_0 n(R-r)/r]}{\Delta n}, \quad (17)$$

ovvero

$$mg(R-r) \sin \phi_0 \frac{\Delta \phi_{0n}}{\Delta n} \simeq -4\rho mg \sin \phi_0 (R-r)/r, \quad (18)$$

da cui

$$\frac{\Delta \phi_{0n}}{\Delta n} \simeq -4\frac{\rho}{r}, \quad (19)$$

che infine consente di stimare come l'ampiezza massima varia col numero delle oscillazioni totali:

$$\phi_0 - \phi_{0n} \equiv \Delta \phi_0 \simeq 4\frac{\rho}{r}n. \quad (20)$$

Dunque l'ampiezza massima delle oscillazioni diminuisce proporzionalmente al numero di oscillazioni complete, con fattore di proporzionalità che è definito dal coefficiente di attrito volvente nella sua forma adimensionale,  $\rho/r$ , che, come già notato, è tipicamente molto piccolo. Una stima approssimativa del valore di  $\rho/r$  nel caso di laboratorio può essere effettuata utilizzando la relazione (20) e andando a dare una valutazione della diminuzione nella ampiezza della oscillazione nel caso di 7 oscillazioni complete e ampiezza iniziale di  $15^\circ$ , sempre aiutandosi con le divisioni sulla superficie sferica. Se si osserva una diminuzione di ampiezza  $\Delta \phi_0 \sim 2^\circ 30' = 0.044$  rad, avremo, dalla (20)

$$\frac{\rho}{r} \simeq \frac{\Delta \phi}{(4 \times 7)} \simeq 0.0016, \quad (21)$$

valore che rientra nell'intervallo caratteristico per contatto acciaio-acciaio.

Ciò che maggiormente ci interessa è capire se e quanto l'attrito volvente influenza la grandezza fondamentale che misuriamo, ovvero il periodo del moto oscillatorio. Con la schematizzazione già introdotta per l'azione delle forze d'attrito, possiamo arrivare a scrivere l'equazione del moto tenendo conto anche dell'attrito stesso, partendo dalle equazioni cardinali per il sistema [eq. (13)] nel caso di rotolamento puro ed ottenendo

$$\ddot{\phi} + \omega^2 \sin \phi + \text{sign}(\dot{\phi})\omega^2\frac{\rho}{r} \cos \phi = 0, \quad (22)$$

dove  $\omega = 2\pi/T$  e  $\text{sign}(\dot{\phi})$  è la funzione “segno di  $\dot{\phi}$ ”, cosicché l'ultimo termine ha segno positivo se  $\dot{\phi} > 0$  e, viceversa, negativo, se  $\dot{\phi} < 0$ .

Questa equazione può essere risolta numericamente, ma nel caso di piccole oscillazioni ( $\sin \phi \sim \phi$ ) è anche possibile una risoluzione analitica in forma approssimata utilizzando metodi perturbativi. Infatti il termine dovuto all'attrito, che rappresenta un termine di smorzamento non-lineare, è molto piccolo (essendo proporzionale a  $\rho/r$ ) e induce una piccola perturbazione sul moto ideale. Si tratta in pratica di valutare termini correttivi rispetto alla ampiezza del moto ideale e al suo periodo, supponendo che l'angolo di oscillazione  $\phi(t)$  sia descrivibile come

$$\phi(t) = \phi_A(t) \cos \psi(t), \quad (23)$$

$$\phi_0 = 15^\circ \quad \rho/r = 0.0016$$

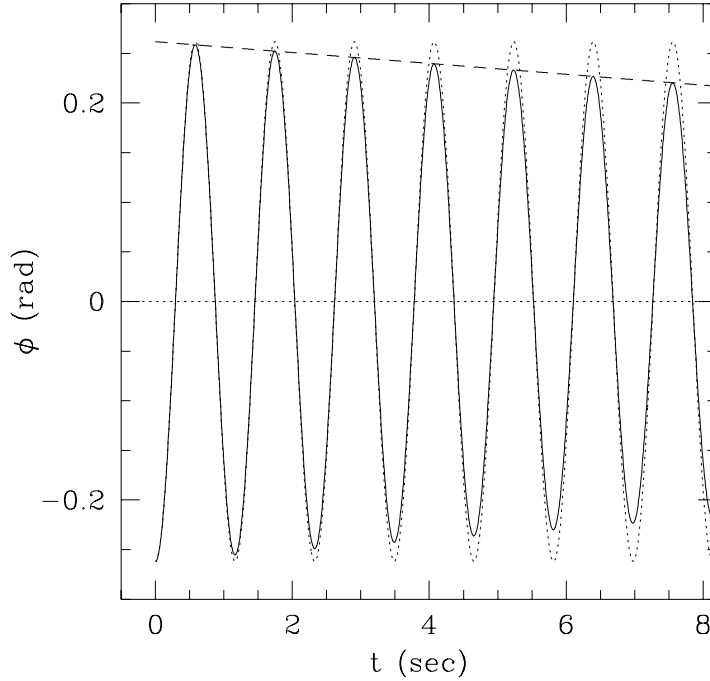


Figura 2:

dove  $\phi_A(t)$  è l'ampiezza della oscillazione (nel caso reale una funzione del tempo  $t$ ) e  $\psi(t) = (\omega_0 + \omega_1)t$ , con  $\omega_0$  che è la frequenza angolare del moto ideale, senza attrito, e  $\omega_1 \ll \omega_0$  [2].

Il risultato che si ottiene è che, in approssimazione del primo ordine, l'ampiezza varia secondo la stessa legge che abbiamo già visto tramite considerazioni energetiche

$$\phi_A(t) = \phi_0 - 4\frac{\rho}{r} \frac{t}{T_0}, \quad (24)$$

dove  $T_0 = 2\pi/\omega_0$ . D'altra parte, con lo stesso ordine di approssimazione, il periodo *non* risulta modificato dalla azione dissipativa dell'attrito volvente. Questo risultato è sostanzialmente confermato da una integrazione numerica della equazione generale (22), valida per qualunque valore della ampiezza iniziale  $\phi_0$ , se  $\rho/r$  è mantenuto sufficientemente piccolo, come nel caso di laboratorio.

La Fig. 2 mostra l'angolo di oscillazione  $\phi$  in funzione del tempo, per un caso in cui si sono scelti parametri fisici adeguati al moto della sferetta in laboratorio; la linea continua rappresenta l'oscillazione come ottenuta dall'integrazione numerica della eq. (22), quella punteggiata sovrapposta descrive invece il corrispondente moto senza attrito volvente,

mentre la linea tratteggiata corrisponde alla legge di variazione temporale approssimata che si è trovata analiticamente per l'ampiezza.

Come si vede, la legge analitica descrive molto bene l'andamento dell'ampiezza calcolato numericamente anche per oscillazioni di ampiezza non piccola; l'effetto di smorzamento sulla ampiezza è sensibile, ma è anche evidente dalla figura come il moto smorzato dall'attrito volvente sia ancora in buona approssimazione descrivibile come periodico con periodo sostanzialmente inalterato rispetto al caso non dissipativo, per i valori di  $\rho/r$  molto piccoli che ci si aspettano per contatto acciaio-acciaio.

Resta a questo punto da verificare se e quanto rilevante rispetto agli attriti per contatto può essere l'effetto della resistenza dell'aria sul moto della sferetta. In modo analogo a quanto fatto per stimare approssimativamente il lavoro compiuto dal momento di attrito volvente con l'eq. (16), da cui segue  $(\Delta L)_{volv} \simeq |\overline{M}_v| \Delta\alpha$  (con  $\Delta\alpha$  spostamento angolare su cui si valuta il lavoro), possiamo cercare una stima di  $(\Delta L)_{res}$ , lavoro compiuto dalla forza di resistenza viscosa dell'aria sulla sferetta quando il suo baricentro compie uno spostamento  $\Delta s = r\Delta\alpha$  e confrontare  $(\Delta L)_{volv}$  e  $(\Delta L)_{res}$  per un dato  $\Delta\alpha$ . Consideriamo  $\Delta\alpha = 2\phi_0(R-r)/r$ , ovvero lo spostamento angolare relativo ad una mezza oscillazione, quando la sferetta si sposta da  $\phi_0$  a  $-\phi_0$ . In prima approssimazione, come per il lavoro dell'attrito volvente, possiamo scrivere

$$(\Delta L)_{res} \simeq \overline{F}_r \Delta s = \overline{F}_r \Delta\alpha r, \quad (25)$$

dove

$$F_r = 6\pi\eta r v_G,$$

è l'espressione per la forza di resistenza viscosa dell'aria ed  $\eta = 1.7 \times 10^{-4}$  poise (1 poise = 1 g/(s cm)) è la viscosità dell'aria a temperatura ambiente. Nel caso della sferetta che rotola avremo

$$F_r = 6\pi\eta r \dot{\phi}(R-r).$$

Dato che ciò che interessa è  $\overline{F}_r$ , cioè la forza mediata sulla mezza oscillazione, occorre dare una stima della velocità media  $\overline{\dot{\phi}}$  sulla mezza oscillazione; dato che siamo interessati all'ordine di grandezza questa stima potrà essere ragionevolmente ottenuta valutando  $\overline{\dot{\phi}^2}$ , tramite l'integrazione della eq. (4), e poi prendendo di questa la radice:

$$\overline{\dot{\phi}^2} = \frac{1}{2\phi_0} \int_{-\phi_0}^{\phi_0} \dot{\phi}^2 d\phi = \dot{\phi}^2(\phi=0) + \frac{10g}{7(R-r)} \left( \frac{\sin \phi_0}{\phi_0} - 1 \right) = \frac{10g}{7(R-r)} \left( \frac{\sin \phi_0}{\phi_0} - \cos \phi_0 \right); \quad (26)$$

conseguentemente avremo che il lavoro della forza di resistenza viscosa su mezza oscillazione sarà dato da

$$\begin{aligned} (\Delta L)_{res} &\simeq \overline{F}_r 2(R-r)\phi_0 = 12\pi\eta \left( \frac{10g}{7} \right)^{1/2} (R-r)^{3/2} r \phi_0 \left( \frac{\sin \phi_0}{\phi_0} - \cos \phi_0 \right)^{1/2} \\ &\simeq 0.24(R-r)^{3/2} r \phi_0 \left( \frac{\sin \phi_0}{\phi_0} - \cos \phi_0 \right)^{1/2} \text{ erg}, \end{aligned} \quad (27)$$

dove  $R$  ed  $r$  sono da intendersi in cm. Questo deve essere confrontato con (vedere eq. (16))

$$\begin{aligned}
 (\Delta L)_{volv} &\simeq \frac{\overline{M_v} 2(R-r)}{r} \phi_0 = 2 \frac{\rho}{r} m g (R-r) \sin \phi_0 = \frac{8\pi g \rho_{acciaio}}{3} r^3 (R-r) \left(\frac{\rho}{r}\right) \sin \phi_0 \\
 &\simeq 6.4 \times 10^4 (R-r) r^3 \left(\frac{\rho}{r}\right) \sin \phi_0 \quad \text{erg,}
 \end{aligned} \tag{28}$$

dove  $R$  ed  $r$  sono da intendersi in cm e si è espressa la massa della sferetta come  $m = (4\pi/3)r^3\rho_{acciaio}$ , con il valore della densità dell'acciaio  $\rho_{acciaio} = 7.8 \text{ g cm}^{-3}$ .

Il rapporto fra i due lavori è quindi

$$\frac{(\Delta L)_{res}}{(\Delta L)_{volv}} \simeq 3.8 \times 10^{-6} \frac{(R-r)^{1/2}}{(\rho/r)r^2} \frac{\phi_0}{\sin \phi_0} \left( \frac{\sin \phi_0}{\phi_0} - \cos \phi_0 \right)^{1/2}; \tag{29}$$

per valori delle grandezze fisiche in gioco tipici delle condizioni di laboratorio, si ha così che il lavoro compiuto dalle forze di resistenza dell'aria risulta al più qualche ‰ di quello relativo all'attrito volvente; se ne conclude che, ai nostri fini, la resistenza dell'aria risulta completamente trascurabile anche rispetto agli altri effetti dissipativi.

### Referenze

- [1] Levi-Civita, T. & Amaldi, U., *Lezioni di Meccanica Razionale*, volume II, parte II, edizioni Zanichelli, Bologna, 1952
- [2] Minorski, N., *Nonlinear Oscillations*, edizioni Krieger, New York, 1974

### Ringraziamenti

Vorrei esprimere tutta la mia gratitudine al Prof. Roberto Falciani e al Prof. Andrea Stefanini per la loro determinante e stimolante collaborazione nella stesura di questi appunti.