STIME di PARAMETRI

Stimatori e stime puntuali

Si indica generalmente con θ un parametro incognito della popolazione.
Si considera uno stimatore puntuale per il parametro θ una statistica campionaria

$$H_n = h(X_1, X_2, \dots X_n)$$

che venga utilizzata per stimare il parametro incognito θ.

Si dice stima puntuale del parametro θ, il valore

$$\hat{\theta} = h(x_1, x_2, \dots x_n)$$

assunto dallo stimatore puntuale $H_n = h(X_1, X_2, \dots X_n)$ nella realizzazione $(x_1, x_2, \dots x_n)$ del campione casuale.

PROPRIETA' (minime) RICHIESTE PER UNO STIMATORE

(1) Uno stimatore $H_n = h(X_1, X_2, \dots X_n)$ è detto corretto (o non distorto) se, qualunque sia il valore effettivo del parametro θ, risulta

$$E[H_n] = E[h(X_1, X_2, \dots X_n)] = \theta$$

(2) Lo stimatore è detto consistente se

$$\lim_{n \to \infty} \mathbb{P}(|H_n - \theta| \leq \varepsilon) = 1 \quad \forall \varepsilon > 0$$

$\Rightarrow$ i.e. uno stimatore è consistente se, quando la numerosità del campione tende all'infinito, esso assume il valore del parametro da stimare con probabilità 1.

<u>Importante</u>: si può dimostrare che uno stimatore corretto è anche consistente se vale

$$\lim_{n \to \infty} Var[H_n] = 0$$

<u>Esempio</u>: media e varianza campionaria sono stimatori corretti dei parametri μ e σ^2 della popolazione.

Se consideriamo il ~~vettore~~ campione statistico $X = \{X_1, \dots X_n\}$

abbiamo

$$\mathbb{E}[\bar{X}_n] = \mu \quad , \quad \mathbb{E}[S_n^2] = \sigma^2 \Rightarrow \text{corretti}$$

Sono inoltre anche consistenti, perché

$$\lim_{n \to \infty} Var[\bar{X}_n] = \lim_{n \to \infty} \frac{\sigma^2}{n} = 0 \quad (\text{limite } \underline{\text{forte}})$$

$$\lim_{n \to \infty} Var[S_n^2] = 0$$

<u>Efficienza degli stimatori</u>

Siano

$$H_{1,n} = h_1(X_1, X_2, \dots X_n)$$
$$H_{2,n} = h_2(X_1, X_2, \dots X_n)$$

due stimatori entrambi corretti scelti per stimare lo stesso parametro ϑ.

Diremo che $H_{1,n}$ è più efficiente dello stimatore $H_{2,n}$, se vale

$$Var[H_{1,n}] \leq Var[H_{2,n}] \quad , \forall n \text{ e } \forall \text{ effettivo valore del parametro da stimare.}$$

Esempio

Stimatori per la media μ della popolazione

$$H_{1,n} = \bar{X}_n = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n}$$

$$H_{2,n} = \frac{X_1}{2} + \frac{X_2 + X_3 + \dots + X_n}{2(n-1)} \qquad n \geq 2$$

$H_{2,n}$ "pesa" di più le v.a. X_1 e X_2,

ma gli stimatori sono entrambi corretti, perché

$$= \mathbb{E}[\bar{X}_n] = \mu = \mathbb{E}[H_{1,n}]$$

$$\mathbb{E}[H_{2,n}] = \mathbb{E}\left[\frac{X_1}{2}\right] + \mathbb{E}\left[\frac{\overbrace{X_2 + X_3 + \dots + X_n}^{n-1}}{2(n-1)}\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\mu + \frac{1}{2(n-1)}(n-1)\mu = \mu$$

Ma

$$\mathrm{Var}[H_{1,n}] = \mathrm{Var}[\bar{X}_n] = \frac{\sigma^2}{n}$$

e $$\mathrm{Var}[H_{2,n}] = \left[\frac{1}{4} + \frac{1}{4(n-1)}\right]\sigma^2$$

Quindi $H_{2,n}$ è corretto ma non consistente.

$\left(\lim_{n\to\infty} \mathrm{Var}[H_{2,n}] \neq 0\right)$

Inoltre

$$\mathrm{Var}[H_{1,n}] \leq \mathrm{Var}[H_{2,n}]$$

Il migliore stimatore di θ se è più efficiente di ogni altro stimatore corretto ed efficiente.