3. HAMILTONIANA ED EQUAZIONI CANONICHE

3.1 La funzione hamiltoniana

Le equazioni di Lagrange per i sistemi olonomi sono equazioni differenziali ordinarie del II ordine, in numero (l) pari al numero di gradi di libertà del sistema, nelle incognite coordinate $q_k(t),\ k = 1, \dots, l$. Tali equazioni, in genere, non si presentano spontaneamente in forma normale. Esiste comunque un intorno, per ogni configurazione accessibile, nel quale le equazioni possono essere esplicitate rispetto alla derivata di ordine massimo. Scegliendo di utilizzare lo spazio delle fasi per descrivere il moto del sistema, si possono affiancare alle coordinate di configurazione le loro l derivate, $\dot{q}_k(t),\ k = 1, \dots, l$, ottenendo così un sistema di $2l$ equazioni del primo ordine in forma normale.

Un metodo alternativo è suggerito dalla forma stessa delle equazioni di Lagrange "conservative":

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k}\right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_k}\ ,\ k = 1, \dots, l\,. \tag{3.1}$$

La presenza di una derivata totale rispetto al tempo nel lato sinistro della (3.1) induce a cercare un cambiamento di coordinate nello spazio delle fasi, sostituendo alle coordinate "cinetiche" $\dot{q}_k$ delle nuove coordinate:

$$p_k \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k}\ ,\ k = 1, \dots, l\,. \tag{3.2}$$

Le p_k rappresentano, come è facile verificare, componenti di quantità di moto (detta anche momento lineare) lungo le direzioni associate alle q_k, nel caso che queste siano coordinate di tipo "spaziale" (ad esempio coordinate cartesiane, oppure la coordinata radiale sia nel caso polare piano che in quello sferico). Nel caso che le q_k siano coordinate di tipo "angolare", invece, le p_k rappresentano componenti del momento angolare nella direzione al piano definito dalla rotazione dell'angolo q_k. Le p_k sono pertanto denominate "momenti cinetici coniugati" alle coordinate lagrangiane q_k. Consideriamo la matrice jacobiana associata al cambiamento delle coordinate $\dot{\mathbf{q}} = (\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_l)$ nelle nuove $\mathbf{p} = (p_1, p_2, \dots, p_l)$, $\left(\frac{\partial p_k}{\partial \dot{q}_h}\right)_{h,k=1,\dots,l}$; utilizzando la (3.2), vale, evidentemente, la seguente uguaglianza:

$$\left(\frac{\partial p_k}{\partial \dot{q}_h}\right)_{h,k=1,\dots,l} = \left(\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k \partial \dot{q}_h}\right)_{h,k=1\dots l} \tag{3.3}$$

Inoltre, se non siamo in presenza di potenziali generalizzati (cioè dipendenti da $\dot{\mathbf{q}}$):

$$\left(\frac{\partial p_k}{\partial \dot{q}_h}\right)_{h,k=1,\dots,l} = \left(\frac{\partial^2 T}{\partial \dot{q}_k \partial \dot{q}_h}\right)_{h,k=1\dots l}\,.$$

D'altra parte:

$$\left(\frac{\partial^2 T}{\partial \dot{q}_k \partial \dot{q}_h}\right)_{h,k=1\dots l} \equiv \left(\frac{\partial^2 T_0}{\partial \dot{q}_k \partial \dot{q}_h}\right)_{h,k=1\dots l},$$

dove

$$T_0 = \frac{1}{2}\sum_{h,k=1}^{l}\left(\sum_{i=1}^{n} m_i \left(\frac{\partial P_i}{\partial q_h}\cdot\frac{\partial P_i}{\partial q_k}\right)\right)\dot{q}_h \dot{q}_k =$$

$$= \frac{1}{2}\,\underset{\sim}{\widehat{Q}}\cdot\underset{\sim}{\widehat{V}} \tag{3.4}$$

è la parte virtuale dell'energia cinetica.

Ma la matrice $\left(\frac{\partial^2 T_0}{\partial \dot{q}_k \partial \dot{q}_h}\right)_{h,k=1\dots l}$, simmetrica e definita positiva, ha determinante non nullo (positivo) in ogni punto dello spazio delle configurazioni ed in ogni istante. È quindi possibile invertire la (3.2) rispetto a $\dot{\mathbf{q}}$, che risultano così esprimibili come funzioni delle $\mathbf{q}$, delle $\mathbf{p}$, oltre che del tempo:

$$\dot{\mathbf{q}} = \dot{\mathbf{q}}\,(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)\ . \tag{3.5}$$

Successivamente alla definizione (3.2) ed al conseguente cambiamento di coordinate nello spazio delle fasi operato tramite la (3.5), introduciamo un'opportuna trasformazione (detta trasformazione di Legendre), che permette di riformulare le equazioni di Lagrange come sistema di $2l$ equazioni del primo ordine, in forma normale. La trasformazione di Legendre è definita per mezzo della funzione di Hamilton, H:

$$H \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k=1}^{l} p_k \dot{q}_k - \mathcal{L}\,. \tag{3.6}$$

Se utilizziamo il cambiamento di coordinate (3.2) nella (3.1), otteniamo:

$$\dot{p}_k = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_k} \quad , \ k = 1, \dots, l\,. \tag{3.7}$$

Ricordando la (3.5), ovvero che le $\dot{q}_k$ dipendono dall'insieme delle $\mathbf{q}$ e delle $\mathbf{p}$, mentre queste ultime, costituendo il nuovo sistema di coordinate, sono fra loro indipendenti, calcoliamo le derivate parziali di H:

$$\frac{\partial H}{\partial q_h} = \sum_{k=1}^{l} p_k \frac{\partial \dot{q}_k}{\partial q_h} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_h} - \sum_{k=1}^{l} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k}\frac{\partial \dot{q}_k}{\partial q_h} = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_h}\,, \tag{3.8}$$

dove la seconda uguaglianza è stata ottenuta utilizzando la (3.2).

$$\frac{\partial H}{\partial p_h} = \dot{q}_h + \sum_{k=1}^{l} p_k \frac{\partial \dot{q}_k}{\partial p_h} - \sum_{k=1}^{l} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k}\frac{\partial \dot{q}_k}{\partial p_h} = \dot{q}_h\,, \tag{3.9}$$

dove per ottenere la seconda uguaglianza si è ancora utilizzato la definizione (3.2). Introducendo adesso le (3.7) (che rappresentano le equazioni di Lagrange nel nuovo sistema di coordinate) in (3.8), otteniamo il sistema completo di $2l$ equazioni del primo ordine, nelle coordinate dello spazio delle fasi $\mathbf{q}$ e $\mathbf{p}$:

$$\begin{cases} \dot{q}_h = \dfrac{\partial H}{\partial p_h} \\ \dot{p}_h = -\dfrac{\partial H}{\partial q_h} \end{cases} . \tag{3.10}$$

Inoltre, se la Lagrangiana $\mathcal{L}$ dipende esplicitamente dal tempo (il che avviene nel caso di vincoli olonomi "mobili" e/o di potenziali derivanti da forze dipendenti dal tempo esplicitamente), dalla (3.6) si deduce un'ulteriore equazione che mette in relazione tale dipendenza in H ed $\mathcal{L}$:

$$\frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} . \tag{3.11}$$

Le (3.10) sono dette **equazioni canoniche** e presentano una particolare simmetria (sono, propriamente, antisimmetriche nelle coppie di variabili coniugate q_h, p_h). La formulazione delle equazioni di moto per sistemi olonomi "conservativi" ad un numero finito di gradi di libertà per mezzo di questo formalismo si è dimostrato particolarmante fortunata dal punto di vista di possibili estensioni a campi quali la Meccanica dei Sistemi Continui, la Meccanica Ondulatoria, la Meccanica Quantistica (formulazione di Heisenberg). Limitandoci a sistemi classici (olonomi e "conservativi") ad un numero finito di gradi di libertà, osserviamo che il vantaggio principale delle equazioni canoniche (3.10) rispetto alle equazioni di Lagrange (3.1) è quello di presentarsi spontaneamente come sistema del primo ordine (ambientato quindi direttamente nello spazio delle fasi) in **forma normale**. La seconda equazione delle (3.10) permette inoltre di individuare immediatamente, come integrali primi, le p_h che restano costanti durante il moto. Questo avviene tutte le volte che la Lagrangiana $\mathcal{L}$, e quindi, tramite la (3.8), anche l'Hamiltoniana H, non dipende dalla coordinata lagrangiana coniugata q_h.

Tuttavia, di fatto, per giungere alle equazioni canoniche occorre procedere attraverso la formulazione lagrangiana, seguendo una non breve successione di passi:

1) Scelto un opportuno insieme di coordinate lagrangiane $\mathbf{q} = (q_1, q_2, \dots, q_l)$, si costruisce la funzione lagrangiana $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$.

2) Si costruisce l'insieme dei momenti coniugati $\mathbf{p} = (p_1, p_2, \dots, p_l)$, per mezzo della (3.2), come funzione delle q_h, $\dot{q}_h$ e del tempo: $\mathbf{p} = \mathbf{p}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$.

3) Si costruisce tramite la (3.6) la funzione di Hamilton H, come funzione "mista" delle $\mathbf{q}, \mathbf{p}, \dot{\mathbf{q}}$ e del tempo t.

4) Si eliminano le $\dot{\mathbf{q}}$ dalla (3.6) per mezzo delle (3.5), che costituiscono l'inversione delle (3.2).

5) Si ottiene la H come funzione delle sole $\mathbf{q}, \mathbf{p}, t$ e si deducono le equazioni canoniche (3.10).

3.2 La funzione di Hamilton come energia totale

Consideriamo adesso la funzione di Hamilton come funzione delle variabili coniugate e del tempo, $H = H(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$, e studiamone la variazione durante il moto del sistema:

$$\frac{dH}{dt} = \sum_{h=1}^{l} \frac{\partial H}{\partial q_h} \dot{q}_h + \sum_{h=1}^{l} \frac{\partial H}{\partial p_h} \dot{p}_h + \frac{\partial H}{\partial t} \; . \tag{3.12}$$

Quindi, introducendo nella (3.12) le equazioni canoniche (3.10), che devono essere verificate durante il moto, avremo:

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t} \; . \tag{3.13}$$

È chiaro il significato della (3.13): se la Lagrangiana $\mathcal{L}$ non dipende esplicitamente dal tempo, allora H si mantiene costante durante il moto (si veda la (3.11)) e ne costituisce quindi un integrale primo. Possiamo vedere facilmente che si tratta dell'integrale primo fornito dalla conservazione dell'energia meccanica totale del sistema ricorrendo alle definizioni (3.6) e (3.2). Infatti, se i vincoli non dipendono esplicitamente dal tempo, l'energia cinetica T si riduce alla parte quadratica omogenea nelle $\dot{\mathbf{q}}$:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{h,k=1}^{l} \frac{\partial^2 T}{\partial \dot{q}_h \partial \dot{q}_k} \dot{q}_h \dot{q}_k \quad . \tag{3.14}$$

Inoltre, in assenza di potenziali generalizzati (dipendenti dalle $\dot{\mathbf{q}}$), avremo:

$$p_h = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_h} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_h} = \sum_{k=1}^{l} \frac{\partial^2 T}{\partial \dot{q}_h \partial \dot{q}_k} \dot{q}_k \; , \quad h = 1, \dots, l, \tag{3.15}$$

dove la seconda uguaglianza è conseguenza della (3.14).

Sostituendo nella (3.6) si ottiene:

$$H = \sum_{h,k=1}^{l} \frac{\partial^2 T}{\partial \dot{q}_h \partial \dot{q}_k} \dot{q}_h \dot{q}_k - \mathcal{L} = 2T - (T - U) = T + U \quad ,$$

ovvero l'energia meccanica totale del sistema.