



UNIVERSITÀ
DEGLI STUDI
FIRENZE

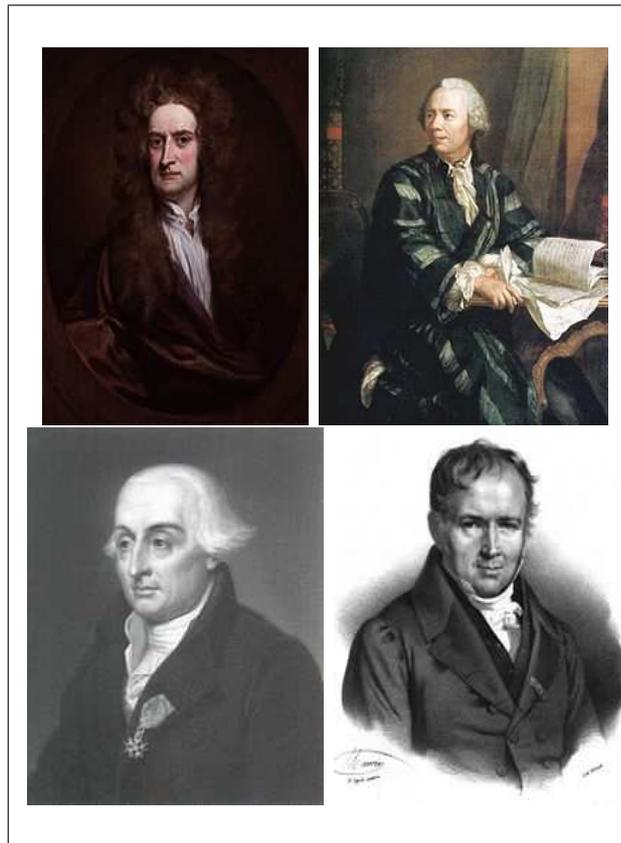
DIMAI
DIPARTIMENTO DI
MATEMATICA E INFORMATICA
"ULISSE DINI"

A.A 2016/2017

Versione 0.5

Giovanni Borgioli ¹

MECCANICA RAZIONALE



¹Dipartimento di Matematica e Informatica "U. Dini" - Università degli Studi di Firenze, via S. Marta 3, **e-mail:** giovanni.borgioli@unifi.it

Nel riquadro di copertina sono riportati, dall'alto a sinistra in senso orario, i ritratti di Sir Isaac Newton, Leonhard Euler (Eulero), Joseph-Louis Lagrange e Siméon-Denis Poisson.

Capitolo 1

Sistemi di riferimento e sistemi di coordinate

1.1 La descrizione geometrica

Inizieremo lo studio del moto di sistemi materiali nello spazio riprendendo alcuni concetti elementari applicati al sistema più semplice, ovvero la particella o punto materiale. Per studiare il movimento di un punto P nello spazio euclideo \mathbb{R}^3 occorre definire un osservatore Σ , costituito da una terna euclidea di origine O , individuata da una base ortonormale di versori $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$, cui possiamo associare un sistema di coordinate cartesiane $\{x, y, z\}$, e da uno strumento per misurare il tempo (cronometro). Noi utilizzeremo sempre terne “di mano destra” o “levogire”, terne, cioè, per le quali le rotazioni positive sono quelle che, in verso antiorario, portano dal primo versore al secondo, dal secondo al terzo e dal terzo al primo.

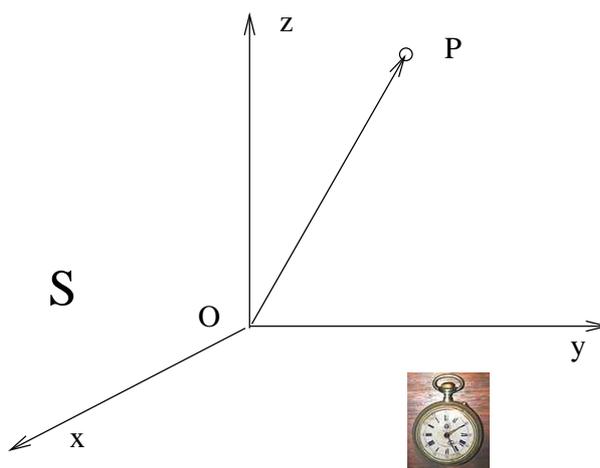


Figura 1.1

Poiché tutto quello che studieremo sarà nell'ambito dei Principi della Meccanica Classica e della Relatività galileiana ¹, assumeremo per ipotesi che tutti gli osservatori misurino lo stesso tempo, indipendentemente dal loro moto relativo. Questo ci porterà ad identificare un osservatore con l'origine del suo riferimento e con la base di direzioni indipendenti da lui scelta, trascurando l'inessenziale caratterizzazione della misura del tempo.

Il vettore posizione che individua il punto P in S è così esprimibile attraverso la base di versori e le coordinate scelte:

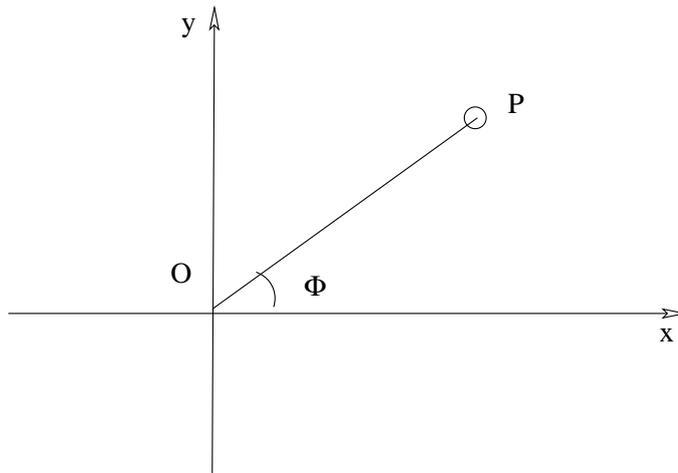
$$\vec{r}_P := (P - O) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} .$$

Come sopra indicato, useremo la notazione $(P - O)$ per indicare un vettore che ha per modulo la distanza fra i punti P ed O , direzione la retta passante per i due punti e verso quello che va da O a P (dal secondo al primo punto). Questa notazione è molto comoda, come vedremo in seguito, per l'operazione di somma fra vettori, riducendola formalmente al semplice calcolo letterale algebrico.

Per descrivere la posizione di un punto nello spazio possono essere usati diversi sistemi di coordinate ed anche diverse basi (generalmente ortonormali), attraverso le quali esprimere il vettore posizione. Iniziamo dal semplice caso piano.

1.2 Coordinate e basi ortonormali nel piano

Nello spazio euclideo \mathbb{R}^2 possiamo introdurre, oltre ad un sistema di coordinate cartesiane $\{x, y\}$ associate ad una base ortonormale di versori, che indicheremo con $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}\}$, il sistema delle coordinate polari $\{r, \phi\}$.



¹Galileo Galilei, fisico, filosofo, astronomo e matematico italiano (Pisa, 15 febbraio 1564 - Arcetri, 8 gennaio 1642) .

Figura 1.2

Il passaggio da un sistema di coordinate all'altro si ottiene per via trigonometrica elementare

$$\begin{cases} x = r \cos \phi \\ y = r \sin \phi \end{cases} . \quad (1.1)$$

La relazione inversa

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \tan \phi = \frac{y}{x} \end{cases} \quad (1.2)$$

non risulta tuttavia definita per ogni coppia $\{x, y\} \in \mathbb{R}^2$.

Il fatto è che le trasformazioni di coordinate sono accettabili in un dominio in cui le relazioni risultino invertibili, ovvero se vogliamo passare, ad esempio, dalla coppia $\{x, y\}$ ad una qualunque nuova coppia di coordinate, che indicheremo con $\{q_1, q_2\}$, la trasformazione

$$\begin{cases} x = x(q_1, q_2) \\ y = y(q_1, q_2) \end{cases} \quad (1.3)$$

deve essere invertibile. Questo significa che la matrice jacobiana associata alla (1.3)

$$\mathbb{J} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial q_1} & \frac{\partial x}{\partial q_2} \\ \frac{\partial y}{\partial q_1} & \frac{\partial y}{\partial q_2} \end{pmatrix}$$

deve avere determinante non nullo. Nel caso del passaggio da coordinate cartesiane a coordinate polari, posto $q_1 = r$ e $q_2 = \phi$, avremo

$$\det \mathbb{J} = \det \begin{pmatrix} \cos \phi & -r \sin \phi \\ \sin \phi & r \cos \phi \end{pmatrix} = r .$$

La trasformazione di coordinate risulta quindi invertibile solo per $r \neq 0$.

Al sistema di coordinate polari risulta "naturale" associare una base ortonormale indotta dalle coordinate stesse. Se indichiamo con \mathbf{u}_r il versore $\frac{(P-O)}{r}$ (r è il modulo di $(P - O)$), potremo esprimere in modo molto semplice il vettore posizione:

$$(P - O) = r \mathbf{u}_r , \quad \text{dove} \quad \mathbf{u}_r = \cos \phi \mathbf{i} + \sin \phi \mathbf{j} . \quad (1.4)$$

Per ottenere un secondo versore indipendente che completi la nuova base di \mathbb{R}^2 . basta ruotare il versore \mathbf{u}_r di $\frac{\pi}{2}$ nel verso antiorario:

$$\mathbf{u}_\phi = \cos \left(\phi + \frac{\pi}{2} \right) \mathbf{i} + \sin \left(\phi + \frac{\pi}{2} \right) \mathbf{j} = -\sin \phi \mathbf{i} + \cos \phi \mathbf{j} . \quad (1.5)$$

1.3 Coordinate e basi ortonormali nello spazio

Coordinate sferiche. Consideriamo adesso alcuni sistemi di coordinate particolarmente importanti per descrivere la posizione di un punto nello spazio euclideo \mathbb{R}^3 , iniziando dalle coordinate sferiche (si veda la Fig. 1.3). Questo sistema di coordinate è particolarmente utile, quando le condizioni geometriche (ad esempio, il punto è vincolato a muoversi su di una superficie sferica) oppure fisiche (punto materiale soggetto ad un campo di forze centrale: attrazione gravitazionale, forze elettrostatiche coulombiane).

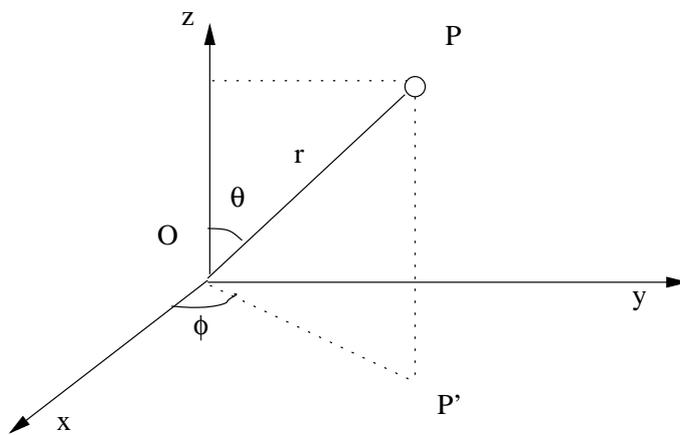


Figura 1.3

Come si deduce facilmente dalla figura, la trasformazione da coordinate cartesiane a polari sferiche risulta

$$\begin{cases} x = r \cos \phi \sin \theta \\ y = r \sin \phi \sin \theta \\ z = r \cos \theta \end{cases}, \quad (1.6)$$

mentre la trasformazione inversa è

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ \tan \phi = \frac{y}{x} \\ \cos \theta = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \end{cases}. \quad (1.7)$$

Come nel caso delle coordinate polari piane, possiamo determinare il dominio di invertibilità della trasformazione per mezzo del calcolo dello Jacobiano ²

²Carl Gustav Jacob Jacobi, matematico tedesco (Potsdam, 10 dicembre 1804 - Berlino, 18 febbraio 1851).

:

$$\det \mathbb{J} = \det \begin{pmatrix} \cos \phi \sin \theta & r \cos \phi \cos \theta & -r \sin \phi \sin \theta \\ \sin \phi \sin \theta & r \sin \phi \cos \theta & r \cos \phi \sin \theta \\ \cos \theta & -r \sin \theta & 0 \end{pmatrix} = r^2 \sin \theta .$$

La trasformazione risulta quindi singolare per $r = 0$ e per $\sin \theta = 0$. Per questi valori non c'è corrispondenza biunivoca fra una terna cartesiana ed una terna polare sferica.

Coordinate cilindriche. Seguendo le stesse considerazioni introdotte per le coordinate sferiche, un diverso sistema di coordinate può essere scelto se proprietà geometriche o fisiche inducono simmetrie di tipo cilindrico. Questo sistema di coordinate in \mathbb{R}^3 fa uso delle coordinate polari piane (per individuare la posizione della proiezione ortogonale P' del punto P sul piano $\{x, y\}$) e della quota z per completare la terna.

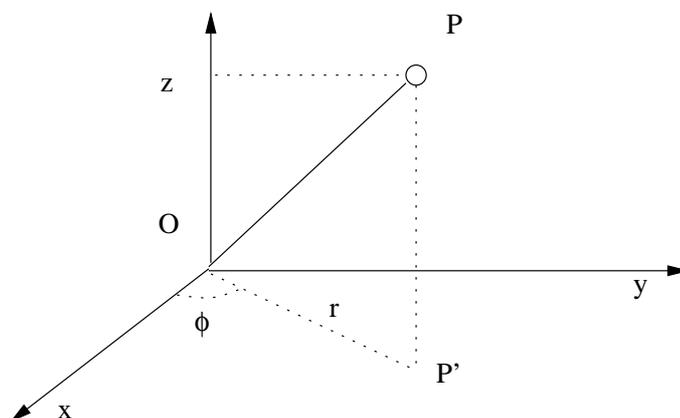


Figura 1.4

La trasformazione risulta quindi

$$\begin{cases} x = r \cos \phi \\ y = r \sin \phi . \\ z \equiv z \end{cases} \quad (1.8)$$

Lo Jacobiano di questa trasformazione di coordinate risulta una semplice “estensione” a dimensione 3 di quello relativo alle coordinate polari piane:

$$\det \mathbb{J} = \det \begin{pmatrix} \cos \phi & -r \sin \phi & 0 \\ \sin \phi & r \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = r .$$

La trasformazione è dunque singolare (e quindi non invertibile) come nel caso piano.

Coordinata intrinseca.

Le ipotesi sotto le quali studieremo il moto di un punto nello spazio garantiscono che esso descriverà nel tempo una curva regolare in \mathbb{R}^3 (traiettoria). Questo significa che, dal punto di vista matematico, tale luogo geometrico è rappresentabile da una funzione, almeno di classe \mathcal{C}^2 , da un intervallo aperto $(a, b) \in \mathbb{R}$ in \mathbb{R}^n (per noi i casi di interesse saranno $n = 2, 3$):

$$P(q) = \begin{cases} x = x(q) \\ y = y(q) \\ z = z(q) \end{cases},$$

dove $q \in (a, b)$. q è il parametro scelto per rappresentare la curva e le ipotesi di regolarità della funzione garantiscono l'esistenza di tangente e normale in ogni punto della curva.

Questa rappresentazione del vettore posizione ($P-O$) richiede evidentemente che la traiettoria sia nota (il che non significa che sia noto il moto) ed è di fondamentale importanza quando studieremo il moto di un punto vincolato ad una linea, ma, come vedremo nello studio della cinematica, porta anche a risultati fondamentali su velocità ed accelerazione del punto, sia nel caso libero che in quello vincolato.

Particolare interesse, per il fine sopra esposto, ha la rappresentazione parametrica della traiettoria per mezzo del parametro d'arco s , che misura la lunghezza dell'arco di curva percorso. Poiché

$$s_{\widehat{P_0P}} = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dq}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dq}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dq}\right)^2} dq$$

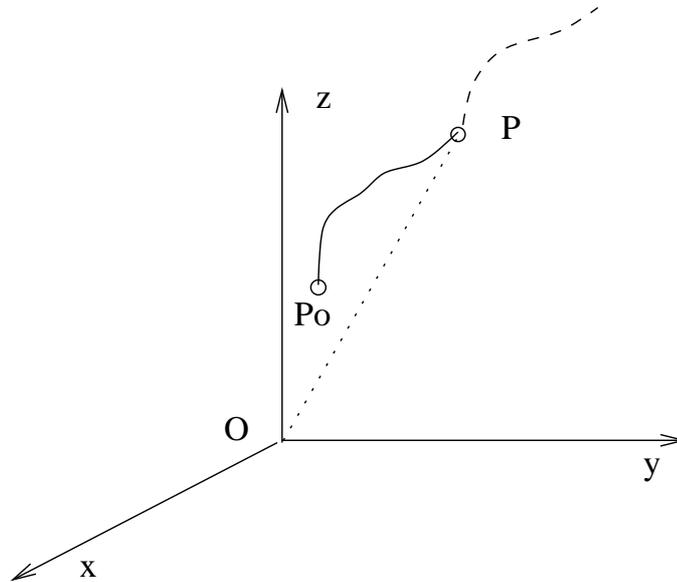


Figura 1.5

risulterà

$$ds = \sqrt{\left(\frac{dx}{dq}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dq}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dq}\right)^2} dq$$

Ricordiamo, in chiusura di paragrafo, che la trasformazione del sistema di coordinate, da cartesiane ad altre qualsiasi, implica una diversa descrizione della geometria dello spazio e, quindi, anche di aree e volumi da considerare. L'elemento di area $dx dy$, espresso in coordinate cartesiane, si trasforma in $|\det \mathbb{J}| dq_1 dq_2$ per la trasformazione di coordinate

$$\begin{cases} x = x(q_1, q_2) \\ y = y(q_1, q_2) \end{cases}$$

e l'elemento di volume $dx dy dz$, espresso in coordinate cartesiane, si trasforma in $|\det \mathbb{J}| dq_1 dq_2 dq_3$ per la trasformazione di coordinate

$$\begin{cases} x = x(q_1, q_2, q_3) \\ y = y(q_1, q_2, q_3) \\ z = z(q_1, q_2, q_3) \end{cases} .$$

1.4 Cinematica del punto

Ricordiamo le fondamentali definizioni di velocità \mathbf{v} ed accelerazione \mathbf{a} di un punto P rispetto ad un osservatore “fisso” S , rappresentato da una terna euclidea di origine O e direzioni ortogonali (riferimento di mano destra)

individuare dai versori $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$:

$$\mathbf{v} := \frac{dP}{dt}, \quad \mathbf{a} := \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d^2P}{dt^2}.$$

Poiché per l'osservatore S , l'origine O e le direzioni individuate dalla terna di versori $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ sono fisse (e quindi costanti nel tempo), la rappresentazione di velocità ed accelerazione mediante le coordinate cartesiane associate alla base di versori fissi risulta immediata:

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= \dot{x}\mathbf{i} + \dot{y}\mathbf{j} + \dot{z}\mathbf{k}, \\ \mathbf{a} &= \ddot{x}\mathbf{i} + \ddot{y}\mathbf{j} + \ddot{z}\mathbf{k}. \end{aligned} \quad (1.9)$$

Se si desidera utilizzare un diverso sistema di coordinate, mantenendo però la rappresentazione di velocità ed accelerazione secondo le direzioni della terna fissa $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$, sarà sufficiente derivare rispetto al tempo le relazioni che rappresentano il cambiamento di coordinate. Ad esempio, se vogliamo utilizzare la rappresentazione in coordinate cilindriche avremo per la velocità

$$\begin{cases} \dot{x} = \dot{r} \cos \phi - r\dot{\phi} \sin \phi, \\ \dot{y} = \dot{r} \sin \phi + r\dot{\phi} \cos \phi, \\ \dot{z} \equiv \dot{z} \end{cases} \quad (1.10)$$

e per l'accelerazione

$$\begin{cases} \ddot{x} = (\ddot{r} - r\dot{\phi}^2) \cos \phi - (2\dot{r}\dot{\phi} + r\ddot{\phi}) \sin \phi, \\ \ddot{y} = (\ddot{r} - r\dot{\phi}^2) \sin \phi + (2\dot{r}\dot{\phi} + r\ddot{\phi}) \cos \phi, \\ \ddot{z} \equiv \ddot{z} \end{cases}. \quad (1.11)$$

Naturalmente, nel caso piano ($z = 0$) di passaggio dalle coordinate cartesiane a quelle polari piane, le relazioni fra le componenti di velocità ed accelerazione si riducono alle prime due di (1.10) e (1.11).

Si lascia per esercizio il calcolo delle componenti di velocità ed accelerazione nel caso di passaggio da coordinate cartesiane a polari sferiche.

Velocità ed accelerazione in basi “mobili”.

Abbiamo già accennato al fatto che la scelta di un sistema di coordinate è in generale suggerito dalle proprietà di simmetria indotte dalla geometria dello spazio in cui il punto si muove o da quelle del campo di forze a cui è soggetto. Se il punto materiale P è costretto a muoversi su di una superficie sferica, oppure, libero di muoversi in \mathbb{R}^3 , è sottoposto ad una forza centrale (ad esempio, attrazione gravitazionale, forza elettrostatica coulombiana)³

³Charles Augustin de Coulomb, ingegnere e fisico francese (Angoulême, 14 giugno 1736 - Parigi, 23 agosto 1806).

, etc.), allora, oltre a ricorrere al sistema di coordinate adatto, è conveniente e, in generale, necessario per una “lettura” il più possibile semplice del moto di P , ricorrere ad una scomposizione dei vettori velocità ed accelerazione secondo direzioni che non sono quelle fisse dell’osservatore S . Ogni terna di coordinate in \mathbb{R}^3 suggerisce un sistema associato di tre versori indipendenti (e, se possibile, ortogonali fra loro), attraverso i quali risulta possibile rappresentare qualunque vettore dello spazio. Inizieremo dal semplice caso delle coordinate polari piane (Fig. 1.2). Prima di affrontarlo, però, premettiamo una semplice, ma fondamentale, osservazione: per una qualsiasi grandezza vettoriale \mathbf{V} di modulo costante, la sua derivata rispetto al tempo è ortogonale a \mathbf{V} stessa. Infatti se

$$\|\mathbf{V}\| = \text{costante} \quad \Rightarrow \quad \|\mathbf{V}\|^2 = \mathbf{V} \cdot \mathbf{V} = \text{costante}$$

e, di conseguenza

$$\frac{d}{dt}\|\mathbf{V}\|^2 = 2\mathbf{V} \cdot \frac{d}{dt}\mathbf{V} = 0.$$

Quindi, se $\frac{d}{dt}\mathbf{V} \neq 0$ (ovvero se \mathbf{V} non è costante, ma solo di modulo costante), allora la sua derivata rispetto al tempo è ortogonale a \mathbf{V} stessa. Questo risultato è ovviamente valido per derivate temporali dei versori (vettori di modulo unitario), che non abbiano direzione costante nel tempo rispetto all’osservatore prescelto.

Base polare piana. Abbiamo visto in (1.4) come il vettore posizione ($P - O$) sia rappresentabile con semplicità utilizzando la direzione associata alla coordinata radiale r . Tuttavia, se P si muove rispetto all’osservatore, il versore \mathbf{u}_r cambierà in generale direzione. Se vogliamo mantenere questa rappresentazione dovremo quindi procedere nel modo seguente

$$\mathbf{v} = \dot{r}\mathbf{u}_r + r\frac{d\mathbf{u}_r}{dt}. \quad (1.12)$$

Sappiamo che il vettore $\frac{d\mathbf{u}_r}{dt}$, se non è nullo, è ortogonale a \mathbf{u}_r . In questo caso possiamo facilmente calcolarlo dalla sua rappresentazione rispetto alla base di versori fissi $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}\}$ presente in (1.4):

$$\frac{d\mathbf{u}_r}{dt} = \dot{\phi}(-\sin\phi\mathbf{i} + \cos\phi\mathbf{j}). \quad (1.13)$$

È immediato riconoscere in $(-\sin\phi\mathbf{i} + \cos\phi\mathbf{j})$ un vettore di modulo unitario, ortogonale a \mathbf{u}_r . Indicando con \mathbf{u}_ϕ quest’ultimo versore, abbiamo completato la base ortonormale $\{\mathbf{u}_r, \mathbf{u}_\phi\}$, associata alle coordinate polari piane, attraverso la quale possiamo rappresentare un qualunque vettore di \mathbb{R}^2 . In questa rappresentazione la velocità assume la forma

$$\mathbf{v} = \dot{r}\mathbf{u}_r + r\dot{\phi}\mathbf{u}_\phi, \quad (1.14)$$

con

$$\mathbf{u}_r = \cos \phi \mathbf{i} + \sin \phi \mathbf{j}, \quad \mathbf{u}_\phi = -\sin \phi \mathbf{i} + \cos \phi \mathbf{j}. \quad (1.15)$$

Per la rappresentazione dell'accelerazione dobbiamo ancora calcolare $\frac{d\mathbf{u}_\phi}{dt}$. Sappiamo che il risultato darà un vettore ortogonale a \mathbf{u}_ϕ e, quindi, necessariamente, parallelo a \mathbf{u}_r . Usando ancora la rappresentazione di \mathbf{u}_ϕ sulla base fissa, avremo

$$\frac{d\mathbf{u}_\phi}{dt} = -\dot{\phi}(\cos \phi \mathbf{i} + \sin \phi \mathbf{j}) = -\dot{\phi} \mathbf{u}_r. \quad (1.16)$$

Dalle (1.13) e (1.16) risulta immediato esprimere l'accelerazione di P nei termini delle coordinate polari e della base ortonormale da loro indotta:

$$\mathbf{a} = (\ddot{r} - r\dot{\phi}^2) \mathbf{u}_r + (r\ddot{\phi} + 2\dot{r}\dot{\phi}) \mathbf{u}_\phi. \quad (1.17)$$

Le coordinate polari piane costituiscono la scelta naturale per studiare moti circolari con centro nell'origine. Tuttavia le proprietà fondamentali di tali moti non emergerebbero senza l'uso della base $\{\mathbf{u}_r, \mathbf{u}_\phi\}$, associata alle coordinate stesse. In un moto circolare con centro in O abbiamo $r = \text{costante}$ e quindi $\dot{r} = 0$. Le (1.14) e (1.17) si riducono quindi a

$$\mathbf{v} = r\dot{\phi} \mathbf{u}_\phi,$$

$$\mathbf{a} = -r\dot{\phi}^2 \mathbf{u}_r + r\ddot{\phi} \mathbf{u}_\phi,$$

dove si evidenzia che la velocità è tangente alla traiettoria e che l'accelerazione è scomponibile in una parte centripeta $-r\dot{\phi}^2 \mathbf{u}_r$, sempre presente ed una tangenziale $r\ddot{\phi} \mathbf{u}_\phi$, che è nulla se il moto è uniforme ($\dot{\phi} = \text{costante}$).

In conclusione, è importante notare che l'osservatore che scrive le caratteristiche cinematiche del moto del punto P non è più l'osservatore "fisso" $S \equiv \{O; \mathbf{i}, \mathbf{j}\}$, ma l'osservatore "mobile" $S' \equiv \{O; \mathbf{u}_r, \mathbf{u}_\phi\}$, per il quale nascono termini di accelerazione di tipo centripeto ($-r\dot{\phi}^2$) e di tipo Coriolis

$(2\dot{r}\dot{\phi})$, che nell'ambito dinamico danno luogo alle corrispondenti forze inerziali o apparenti.

Trascuriamo il caso della cinematica in coordinate cilindriche, con corrispondente base di versori $\{\mathbf{u}_r, \mathbf{u}_\phi, \mathbf{k}\}$ perché si tratta di una banale estensione del caso appena discusso.

Base polare sferica Partiamo, analogamente a quanto fatto nel caso polare piano, esprimendo il vettore posizione ($P - O$) per mezzo del versore $\mathbf{u}_r =$

⁴Gaspard-Gustave de Coriolis, matematico, fisico e ingegnere meccanico francese (Parigi, 21 maggio 1792 - Parigi, 19 settembre 1843).

$\frac{(P-O)}{r}$, dove (si veda la Fig. 1.3) il versore, rappresentato nella base fissa $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$, assume la forma

$$\mathbf{u}_r = \cos \phi \sin \theta \mathbf{i} + \sin \phi \sin \theta \mathbf{j} + \cos \theta \mathbf{k}. \quad (1.18)$$

Velocità.

L'espressione della velocità risulta quindi

$$\frac{dP}{dt} = \frac{d}{dt}(r\mathbf{u}_r) = \dot{r}\mathbf{u}_r + r\frac{d}{dt}\mathbf{u}_r, \quad (1.19)$$

dove, evidentemente, va calcolato il termine $\frac{d}{dt}\mathbf{u}_r$. Utilizzando la rappresentazione nel riferimento fisso (1.18) si ottiene

$$\frac{d\mathbf{u}_r}{dt} = \dot{\theta}\mathbf{u}_\theta + \dot{\phi} \sin \theta \mathbf{u}_\phi, \quad (1.20)$$

dove abbiamo definito i versori

$$\mathbf{u}_\theta = \cos \phi \cos \theta \mathbf{i} + \sin \phi \cos \theta \mathbf{j} - \sin \theta \mathbf{k} \quad (1.21)$$

$$\mathbf{u}_\phi = -\sin \phi \mathbf{i} + \cos \phi \mathbf{j}.$$

L'espressione della velocità può essere dunque scritta, scomposta secondo i tre versori così identificati:

$$\mathbf{v} = \dot{r}\mathbf{u}_r + r\dot{\theta}\mathbf{u}_\theta + r\dot{\phi} \sin \theta \mathbf{u}_\phi. \quad (1.22)$$

Per stabilire se ed in che ordine i versori \mathbf{u}_r , \mathbf{u}_θ e \mathbf{u}_ϕ costituiscano una base ortonormale per lo spazio \mathbb{R}^3 , occorre verificare il risultato dei prodotti scalari (per l'ortogonalità) e dei prodotti vettoriali (per costruire una terna di mano destra). È facile verificare che $\mathbf{u}_r \cdot \mathbf{u}_\theta = \mathbf{u}_r \cdot \mathbf{u}_\phi = \mathbf{u}_\theta \cdot \mathbf{u}_\phi = 0$, quindi i versori sono fra loro ortogonali. Calcoliamo adesso un prodotto vettoriale per stabilire il "giro" positivo della terna:

$$\mathbf{u}_r \wedge \mathbf{u}_\theta = (\cos \phi \sin \theta \mathbf{i} + \sin \phi \sin \theta \mathbf{j} + \cos \theta \mathbf{k}) \wedge (\cos \phi \cos \theta \mathbf{i} + \sin \phi \cos \theta \mathbf{j} - \sin \theta \mathbf{k}), \quad (1.23)$$

quindi

$$\mathbf{u}_r \wedge \mathbf{u}_\theta = \begin{pmatrix} -\sin^2 \theta \sin \phi - \cos^2 \sin \phi \\ \cos^2 \theta \cos \phi + \sin^2 \theta \cos \phi \\ \sin \theta \cos \theta \sin \phi \cos \phi - \sin \theta \cos \theta \sin \phi \cos \phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin \phi \\ \cos \phi \\ 0 \end{pmatrix} = \mathbf{u}_\phi. \quad (1.24)$$

La terna, secondo l'ordine \mathbf{u}_r , \mathbf{u}_θ , \mathbf{u}_ϕ , costituisce quindi una base ortonormale, positiva nell'ordine della mano destra, per lo spazio \mathbb{R}^3 .

Accelerazione.

Cerchiamo l'espressione dell'accelerazione nella base polare sferica:

$$\begin{aligned}
\mathbf{a} &= \frac{d\mathbf{v}}{dt} \\
&= \ddot{r}\mathbf{u}_r + \dot{r}\frac{d\mathbf{u}_r}{dt} + \dot{r}\dot{\theta}\mathbf{u}_\theta + r\ddot{\theta}\mathbf{u}_\theta + r\dot{\theta}\frac{d\mathbf{u}_\theta}{dt} \\
&\quad + \dot{r}\dot{\phi}\sin\theta\mathbf{u}_\phi + r\ddot{\phi}\sin\theta\mathbf{u}_\phi + r\dot{\phi}\dot{\theta}\cos\theta\mathbf{u}_\phi + r\dot{\phi}\sin\theta\frac{d\mathbf{u}_\phi}{dt}.
\end{aligned} \tag{1.25}$$

Occorre quindi calcolare le derivate dei versori \mathbf{u}_θ e \mathbf{u}_ϕ . È evidente che, costituendo la terna $\{\mathbf{u}_r, \mathbf{u}_\theta, \mathbf{u}_\phi\}$ una base ortonormale per \mathbb{R}^3 , la derivata rispetto al tempo di \mathbf{u}_θ sia un vettore che appartiene al piano individuato da $\mathbf{u}_r, \mathbf{u}_\phi$ e che la derivata di \mathbf{u}_ϕ appartenga al piano individuato da $\mathbf{u}_r, \mathbf{u}_\theta$. Calcoliamole:

$$\begin{aligned}
\frac{d\mathbf{u}_\theta}{dt} &= (-\dot{\theta}\sin\theta\cos\phi - \dot{\phi}\cos\theta\sin\phi)\mathbf{i} + (-\dot{\theta}\sin\theta\sin\phi + \dot{\phi}\cos\theta\cos\phi)\mathbf{j} - \dot{\theta}\cos\theta\mathbf{k} \\
&= -\dot{\theta}(\sin\theta\cos\phi\mathbf{i} + \sin\theta\sin\phi\mathbf{j} + \cos\theta\mathbf{k}) + \dot{\phi}\cos\theta(-\sin\phi\mathbf{i} + \cos\phi\mathbf{j}) \\
&= -\dot{\theta}\mathbf{u}_r + \dot{\phi}\cos\theta\mathbf{u}_\phi.
\end{aligned} \tag{1.26}$$

Per quanto riguarda \mathbf{u}_ϕ avremo

$$\frac{d\mathbf{u}_\phi}{dt} = \dot{\phi}(-\cos\phi\mathbf{i} - \sin\phi\mathbf{j}). \tag{1.27}$$

Il termine in parentesi in (1.27) è un versore che appartiene al piano individuato da $\mathbf{u}_r, \mathbf{u}_\theta$ ed è quindi esprimibile come combinazione lineare dei due versori che individuano tale piano:

$$k_1\mathbf{u}_r + k_2\mathbf{u}_\theta = (-\cos\phi\mathbf{i} - \sin\phi\mathbf{j}), \tag{1.28}$$

che, riprendendo le espressioni di \mathbf{u}_r e \mathbf{u}_θ nella base $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ porta alle seguenti tre equazioni (uguaglianza fra le tre componenti):

$$\begin{aligned}
k_1\sin\theta\cos\phi + k_2\cos\theta\cos\phi &= -\cos\phi \\
k_1\sin\theta\sin\phi + k_2\cos\theta\sin\phi &= -\sin\phi \\
k_1\cos\theta - k_2\sin\theta &= 0.
\end{aligned} \tag{1.29}$$

La terza delle tre equazioni in (1.29) è risolta scegliendo

$$k_1 = -\sin\theta \quad \text{e} \quad k_2 = -\cos\theta,$$

scelta che, introdotta nelle prime due equazioni, le risolve identicamente. Abbiamo così ottenuto la rappresentazione della derivata rispetto al tempo del versore \mathbf{u}_ϕ nel piano ad esso ortogonale ed individuato da \mathbf{u}_r e \mathbf{u}_θ :

$$\frac{d}{dt}\mathbf{u}_\phi = \dot{\phi}(-\sin\theta\mathbf{u}_r - \cos\theta\mathbf{u}_\theta). \quad (1.30)$$

Siamo adesso in grado di scrivere l'accelerazione di P in coordinate sferiche, rappresentandola sulla base ortonormale indotta da tali coordinate:

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\dot{\phi}^2 \sin^2\theta)\mathbf{u}_r \\ &+ (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} - r\dot{\phi}^2 \sin\theta \cos\theta)\mathbf{u}_\theta \\ &+ (r\ddot{\phi} \sin\theta + 2r\dot{\phi}\dot{\theta} \cos\theta + 2\dot{r}\dot{\phi} \sin\theta)\mathbf{u}_\phi \end{aligned} \quad (1.31)$$

Nella (1.31) si riconoscono i termini di tipo centripeto (quelli in $\dot{\phi}^2$ ed in $\dot{\theta}^2$) e quelli di Coriolis, caratterizzati dal fattore 2 e dai prodotti misti fra le derivate prime delle coordinate polari sferiche. È inoltre immediato verificare che l'espressione (1.31) si riduce alla (1.17) nel caso piano ($\theta = \frac{\pi}{2}$).

Base intrinseca.

Come abbiamo già accennato in un precedente paragrafo, le ipotesi di regolarità del moto, sotto le quali lavoriamo, ci consentono di assumere che la traiettoria di un punto P , mobile rispetto ad un osservatore S , sia una curva (in \mathbb{R}^2 o \mathbb{R}^3) rettificabile, per la quale, in ogni punto, sono definite la direzione tangente e quella normale (per questo basta che la funzione da $\mathbb{R} \supset I \rightarrow \mathbb{R}^n$, $n = 2, 3$, dove I è un intervallo aperto, sia di classe \mathcal{C}^2). Ad ogni istante $t > t_0$ corrisponderà una lunghezza di arco di traiettoria $s = s(t)$ percorso da P nell'intervallo di tempo considerato. Se pensiamo che il vettore posizione ($P - O$) sia funzione del tempo t attraverso la lunghezza s dell'arco di traiettoria percorso a partire dall'istante iniziale t_0 (si veda la Fig. 1.5), avremo che $(P - O) = (P(s(t)) - O)$. Questa interpretazione ha una grande importanza per rilevare le proprietà fondamentali delle caratteristiche cinematiche (velocità ed accelerazione) del moto del punto.

Iniziamo dalla velocità

$$\mathbf{v} = \frac{dP(s(t))}{dt} = \frac{dP}{ds}\dot{s}. \quad (1.32)$$

Sappiamo che $\frac{dP}{ds}$ è un vettore tangente alla curva, ma s non è un parametro qualsiasi bensì il parametro che misura la lunghezza dell'arco di traiettoria percorsa. Si può provare che

$$\frac{dP}{ds} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{P(s + \Delta s) - P(s)}{\Delta s} = \mathbf{t}, \quad (1.33)$$

dove \mathbf{t} ha modulo unitario ed è quindi un versore. La (1.32) si scrive quindi come

$$\mathbf{v} = \dot{s}\mathbf{t}. \quad (1.34)$$

La scelta della descrizione parametrica della traiettoria per mezzo del parametro s , detto **ascissa curvilinea** mette in luce la proprietà fondamentale del vettore velocità, quella cioè di essere sempre tangente alla traiettoria; inoltre $|\mathbf{v}| := v = |\dot{s}|$.

Consideriamo adesso l'espressione dell'accelerazione, derivando rispetto al tempo la (1.34)

$$\mathbf{a} = \ddot{s}\mathbf{t} + \dot{s}\frac{d\mathbf{t}}{dt}. \quad (1.35)$$

Il vettore $\frac{d\mathbf{t}}{dt}$ è un vettore ortogonale a \mathbf{t} e considerando \mathbf{t} come funzione del tempo t attraverso l'ascissa curvilinea s , ovvero $\mathbf{t} = \mathbf{t}(s(t))$, otteniamo la seguente espressione

$$\frac{d\mathbf{t}}{dt} = \dot{s}\frac{d\mathbf{t}}{ds},$$

dove $\frac{d\mathbf{t}}{ds}$ è ancora, ovviamente, un vettore ortogonale a \mathbf{t} . Poniamo, per definizione

$$\frac{d\mathbf{t}}{ds} := \frac{\mathbf{n}}{\rho},$$

dove

$$\frac{1}{\rho} = \left| \frac{d\mathbf{t}}{ds} \right|,$$

che ha le dimensioni di una lunghezza, ne rappresenta il modulo e \mathbf{n} è un versore ortogonale a \mathbf{t} ed individua la **normale principale**. L'accelerazione può dunque essere rappresentata nel modo seguente:

$$\mathbf{a} = \ddot{s}\mathbf{t} + \frac{\dot{s}^2}{\rho}\mathbf{n} = \ddot{s}\mathbf{t} + \frac{v^2}{\rho}\mathbf{n}. \quad (1.36)$$

Come si vede dalla (1.36), l'accelerazione di un punto P , che si muove in \mathbb{R}^3 , può essere rappresentata da due sole componenti, una tangente alla traiettoria (nulla se il moto è uniforme, se cioè $v = \text{costante}$), ed una normale alla traiettoria (sempre presente, a meno che la traiettoria sia rettilinea: $\rho = \infty$). La terna intrinseca in \mathbb{R}^3 è completata dal **versore binormale**, $\mathbf{b} := \mathbf{t} \wedge \mathbf{n}$, lungo la cui direzione non vi sono componenti delle caratteristiche cinematiche del moto del punto (velocità e accelerazione).

Esempio: Moto circolare

Calcoliamo i versori \mathbf{t} ed \mathbf{n} in un moto sulla circonferenza di centro O (origine del riferimento) e raggio R , che descriviamo parametricamente per mezzo

dell'ascissa curvilinea $s = R\phi$:

$$\begin{cases} x = R \cos \frac{s}{R} \\ y = R \sin \frac{s}{R} \end{cases} . \quad (1.37)$$

Otteniamo così

$$\mathbf{t} = \frac{dP}{ds} = -\sin \frac{s}{R} \mathbf{i} + \cos \frac{s}{R} \mathbf{j} \quad (1.38)$$

e

$$\mathbf{n} = R \frac{d\mathbf{t}}{ds} = \left(-\cos \frac{s}{R} \mathbf{i} - \sin \frac{s}{R} \mathbf{j} \right) . \quad (1.39)$$

Confrontando le (1.38) e (1.39) con le (1.15), si ottiene

$$\mathbf{t} = \mathbf{u}_\phi , \quad \mathbf{n} = -\mathbf{u}_r . \quad (1.40)$$

Si osserva così che il versore normale ha il segno opposto a quello radiale ed è quindi centripeto e che il raggio di curvatura è il raggio della circonferenza percorsa.

Capitolo 2

Cinematica relativa

2.1 Cinematica del punto

Consideriamo un punto P in \mathbb{R}^3 , la cui posizione viene rilevata da due diversi osservatori, $\Sigma \equiv \{\Omega; \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ ed $S \equiv \{O; \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$.

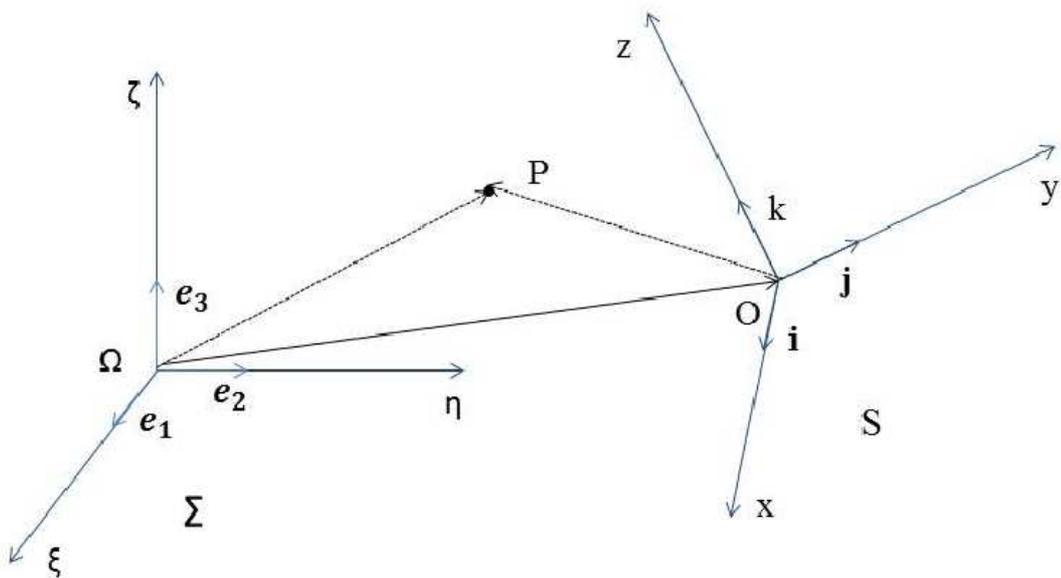


Figura 2.1

Σ rappresenta il vettore posizione $(P - \Omega)$ secondo la scelta delle sue direzioni “fisse” $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ e le corrispondenti coordinate $\{\xi, \eta, \zeta\}$, mentre S rappresenta il vettore posizione $(P - O)$ secondo la sua base $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ e le corrispondenti coordinate $\{x, y, z\}$.

$$(P - \Omega)_\Sigma = \xi \mathbf{e}_1 + \eta \mathbf{e}_2 + \zeta \mathbf{e}_3, \quad (P - O)_S = x \mathbf{i} + y \mathbf{j} + z \mathbf{k}. \quad (2.1)$$

Tuttavia sussisterà sempre la relazione

$$(P - O) = (P - \Omega) + (\Omega - O) \quad (2.2)$$

che sarà valida, indipendentemente dalla scelta della rappresentazione. Il vettore $(\Omega - O)$, che individua la separazione fra le origini dei due riferimenti, può, ovviamente, essere rappresentato sia da Σ che da S . Privilegiamo, in modo del tutto arbitrario, Σ e rappresentiamo $\Omega - O$ nel suo riferimento. Dal punto di vista della rappresentazione avremo dunque

$$(P - \Omega)_\Sigma + (\Omega - O)_\Sigma = (P - O)_S, \quad (2.3)$$

che, espresso esplicitamente, si scrive

$$(\xi - \xi_O)\mathbf{e}_1 + (\eta - \eta_O)\mathbf{e}_2 + (\zeta - \zeta_O)\mathbf{e}_3 = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}, \quad (2.4)$$

che esprime la relazione che sussiste fra coordinate e basi ortonormali dei due diversi osservatori. La relazione precedente consente di esplicitare le coordinate di S in funzione di quelle di Σ e viceversa. Se proiettiamo la (2.4) sui tre versori della base di S , moltiplicandola scalarmente, rispettivamente per \mathbf{i} , \mathbf{j} e \mathbf{k} , otteniamo

$$\begin{cases} x = (\xi - \xi_O)(\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{i}) + (\eta - \eta_O)(\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{i}) + (\zeta - \zeta_O)(\mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{i}) \\ y = (\xi - \xi_O)(\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{j}) + (\eta - \eta_O)(\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{j}) + (\zeta - \zeta_O)(\mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{j}) \\ z = (\xi - \xi_O)(\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{k}) + (\eta - \eta_O)(\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{k}) + (\zeta - \zeta_O)(\mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{k}). \end{cases} \quad (2.5)$$

Quindi, posto

$$\begin{cases} \alpha_1 = \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{i}, & \alpha_2 = \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{i}, & \alpha_3 = \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{i} \\ \beta_1 = \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{j}, & \beta_2 = \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{j}, & \beta_3 = \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{j} \\ \gamma_1 = \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{k}, & \gamma_2 = \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{k}, & \gamma_3 = \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{k}, \end{cases} \quad (2.6)$$

possiamo rappresentare la (2.5) come una trasformazione lineare in \mathbb{R}^3 :

$$(x, y, z)^T = \mathbb{A}(\xi - \xi_O, \eta - \eta_O, \zeta - \zeta_O)^T, \quad (2.7)$$

dove il simbolo T indica il trasposto del vettore riga (ovvero il vettore colonna) e la matrice \mathbb{A} , detta **matrice dei coseni direttori** o **matrice di rotazione** è definita come

$$\mathbb{A} := \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{pmatrix}. \quad (2.8)$$

Osserviamo che le righe della matrice \mathbf{A} rappresentano le componenti dei versori, rispettivamente $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ espressi nel riferimento di Σ , sono quindi vettori fra loro ortogonali. La stessa considerazione vale per le colonne di \mathbf{A} , che rappresentano le componenti dei versori di Σ , rispettivamente $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$, nella base di S . Ricordiamo inoltre che fra i versori della base di S (ed analogamente per quelli della base di Σ) sussistono le relazioni di ortonormalità:

$$\begin{aligned} \mathbf{i}^2 &= \sum_{h=1}^3 \alpha_h^2 = \mathbf{j}^2 = \sum_{h=1}^3 \beta_h^2 = \mathbf{k}^2 = \sum_{h=1}^3 \gamma_h^2 = 1 \\ \mathbf{i} \cdot \mathbf{j} &= \sum_{h=1}^3 \alpha_h \beta_h = \mathbf{j} \cdot \mathbf{k} = \sum_{h=1}^3 \beta_h \gamma_h = \mathbf{k} \cdot \mathbf{i} = \sum_{h=1}^3 \gamma_h \alpha_h = 0 \end{aligned} \quad (2.9)$$

e

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_1^2 &= \alpha_1^2 + \beta_1^2 + \gamma_1^2 = \mathbf{e}_2^2 = \alpha_2^2 + \beta_2^2 + \gamma_2^2 = \mathbf{e}_3^2 = \alpha_3^2 + \beta_3^2 + \gamma_3^2 = 1 \\ \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2 &= \alpha_1 \alpha_2 + \beta_1 \beta_2 + \gamma_1 \gamma_2 = 0 \\ \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_3 &= \alpha_2 \alpha_3 + \beta_2 \beta_3 + \gamma_2 \gamma_3 = 0 \\ \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_1 &= \alpha_3 \alpha_1 + \beta_3 \beta_1 + \gamma_3 \gamma_1 = 0. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Il fatto che sussistano sei relazioni indipendenti che legano fra loro i nove coefficienti della matrice ci dice che tali coefficienti possono essere tutti espressi attraverso la scelta di tre opportuni parametri (angoli) fra loro indipendenti. Vedremo più avanti una possibile scelta.

La matrice \mathbb{A} , essendo formata da tutti coefficienti reali, ha sicuramente determinante reale. Possiamo verificare che non è nullo, valutando il determinante del prodotto con la matrice trasposta:

$$\mathbb{A}^T \mathbb{A} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{pmatrix}. \quad (2.11)$$

Avremo quindi

$$\mathbb{A}^T \mathbb{A} = \begin{pmatrix} \alpha_1^2 + \beta_1^2 + \gamma_1^2 & \alpha_1 \alpha_2 + \beta_1 \beta_2 + \gamma_1 \gamma_2 & \alpha_3 \alpha_1 + \beta_3 \beta_1 + \gamma_3 \gamma_1 \\ \alpha_1 \alpha_2 + \beta_1 \beta_2 + \gamma_1 \gamma_2 & \alpha_2^2 + \beta_2^2 + \gamma_2^2 & \alpha_2 \alpha_3 + \beta_2 \beta_3 + \gamma_2 \gamma_3 \\ \alpha_3 \alpha_1 + \beta_3 \beta_1 + \gamma_3 \gamma_1 & \alpha_2 \alpha_3 + \beta_2 \beta_3 + \gamma_2 \gamma_3 & \alpha_3^2 + \beta_3^2 + \gamma_3^2 \end{pmatrix}. \quad (2.12)$$

Dalle (2.10) si ottiene immediatamente

$$\mathbb{A}^T \mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbb{I}, \quad (2.13)$$

dove \mathbb{I} rappresenta la matrice identità. Per le proprietà del determinante del prodotto di matrici quadrate abbiamo

$$\det(\mathbb{A}^T \mathbb{A}) = \det \mathbb{A}^T \det \mathbb{A} = (\det \mathbb{A})^2 = 1. \quad (2.14)$$

Il determinante di \mathbb{A} è necessariamente 1 o -1 . La matrice \mathbb{A} rappresenta quindi un'isometria (conserva le misure e le relazioni angolari fra i vettori a cui è applicata). Si può provare che il suo determinante vale, in effetti, 1. \mathbb{A} è quindi una **matrice ortogonale**; poiché, avendo determinante non nullo (matrice non singolare), ammette la matrice inversa \mathbb{A}^{-1} , tale che

$$\mathbb{A}^{-1} \mathbb{A} = \mathbb{I}, \quad (2.15)$$

ne segue la fondamentale proprietà

$$\mathbb{A}^{-1} = \mathbb{A}^T. \quad (2.16)$$

Questo risultato ci permette di scrivere la relazione inversa della (2.8), che esprime le coordinate di P ed O in Σ in funzione delle coordinate di P in S :

$$(\xi - \xi_O, \eta - \eta_O, \zeta - \zeta_O)^T = \mathbb{A}^T(x, y, z)^T. \quad (2.17)$$

Le matrici \mathbb{A} e \mathbb{A}^T , come è facile verificare dalle relazioni (2.6), servono anche per esprimere i versori della base di S in funzione di quelli di Σ e viceversa:

$$\begin{aligned} (\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})^T &= \mathbb{A}(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)^T, \\ (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)^T &= \mathbb{A}^T(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})^T \end{aligned} \quad (2.18)$$

Matrici di rotazione

Osserviamo che la matrice \mathbb{A} è un operatore lineare nello spazio vettoriale \mathbb{R}^3 e, se applichiamo \mathbb{A} ad un vettore $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^3$, otteniamo, in generale, un nuovo vettore $\mathbf{r}' \in \mathbb{R}^3$:

$$\mathbf{r}' = \mathbb{A}\mathbf{r}.$$

Poiché \mathbb{A} è una matrice unitaria, avremo che $\|\mathbb{A}\mathbf{r}\| = \|\mathbf{r}\|$ e quindi $\|\mathbf{r}\| = \|\mathbf{r}'\|$. Il modulo del vettore viene quindi conservato nella trasformazione.

Vediamo il significato dell'applicazione di \mathbb{A} nel caso piano. Applichiamo la matrice \mathbb{A} ad un vettore \mathbf{r} di \mathbb{R}^2 , di componenti ξ ed η :

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi \cos \theta + \eta \sin \theta \\ -\xi \sin \theta + \eta \cos \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi' \\ \eta' \end{pmatrix} \quad (2.19)$$

Il vettore $\mathbf{r}' = (\xi', \eta')^T$, visto come il trasformato di $(\xi, \eta)^T$ nel riferimento di Σ , dopo l'applicazione dell'operatore lineare \mathbb{A} , risulta essere il vettore \mathbf{r} ruotato "all'indietro" (cioè in verso orario) dell'angolo θ . È semplice verificare questa affermazione. Facendo riferimento alla Fig. 1.2, possiamo scrivere

$$\mathbf{r} = \xi \mathbf{i} + \eta \mathbf{j} = r(\cos \phi \mathbf{i} + \sin \phi \mathbf{j}). \quad (2.20)$$

Il vettore \mathbf{r}' che si ottiene ruotando in senso orario \mathbf{r} di un angolo θ si scrive facilmente dalla (2.20) come

$$\mathbf{r}' = r(\cos(\phi - \theta) \mathbf{i} + \sin(\phi - \theta) \mathbf{j}) = (r \cos \phi \cos \theta + r \sin \phi \sin \theta) \mathbf{i} + (r \sin \phi \cos \theta - r \cos \phi \sin \theta) \mathbf{j}. \quad (2.21)$$

Introducendo nella (2.21) le componenti ξ e η di \mathbf{r} otteniamo dunque

$$\mathbf{r}' = (\xi', \eta')^T = (\xi \cos \theta + \eta \sin \theta, -\xi \sin \theta + \eta \cos \theta)^T = \mathbb{A} \mathbf{r}. \quad (2.22)$$

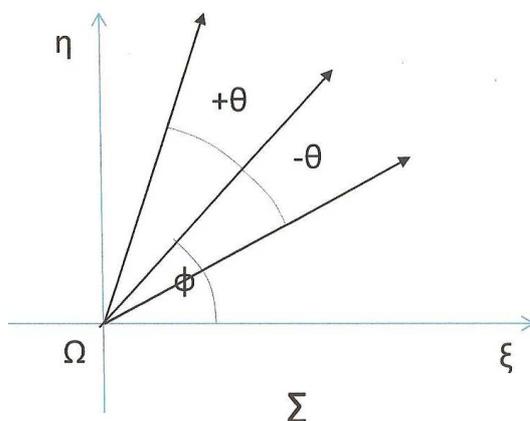


Figura 2.2

La rotazione "in avanti" (cioè nel verso positivo antiorario) si ottiene applicando ad \mathbf{r} la matrice trasposta \mathbb{A}^T .

Riprendiamo il caso più generale delle trasformazioni in \mathbb{R}^3 .

Velocità rispetto a due osservatori

Riprendiamo la relazione intrinseca (2.3) e deriviamola rispetto al tempo. Per mantenere l'uguaglianza dopo la derivazione, la derivata deve essere fatta da un solo osservatore per entrambi i membri. Scegliamo Σ , che indicheremo come l'**osservatore fisso**:

$$\frac{d}{dt_\Sigma} [(P - \Omega)_\Sigma + (\Omega - O)_\Sigma] = \frac{d}{dt_\Sigma} (P - O)_S, \quad (2.23)$$

dove $\frac{d}{dt_\Sigma}$ indica la derivata temporale effettuata da Σ rispetto al proprio tempo. Se riscriviamo la (2.23) esplicitamente per mezzo delle coordinate e dei versori scelti dai due osservatori Σ ed S , otteniamo

$$\frac{d}{dt_\Sigma} [(\xi - \xi_O)\mathbf{e}_1 + (\eta - \eta_O)\mathbf{e}_2 + (\zeta - \zeta_O)\mathbf{e}_3] = \frac{d}{dt_\Sigma} (x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}). \quad (2.24)$$

L'osservatore Σ vede fissi i propri versori $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$, mentre, in generale, vede variare le direzioni dei versori di S , $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$. Ricordando che il tempo è lo stesso per tutti gli osservatori ($t_\Sigma = t_S = t$), la (2.24) si scrive

$$\begin{aligned} & \left(\dot{\xi}\mathbf{e}_1 + \dot{\eta}\mathbf{e}_2 + \dot{\zeta}\mathbf{e}_3 \right) - \left(\dot{\xi}_O\mathbf{e}_1 + \dot{\eta}_O\mathbf{e}_2 + \dot{\zeta}_O\mathbf{e}_3 \right) \\ & = (x\dot{\mathbf{i}} + y\dot{\mathbf{j}} + z\dot{\mathbf{k}}) + \left(x\frac{d\mathbf{i}}{dt} + y\frac{d\mathbf{j}}{dt} + z\frac{d\mathbf{k}}{dt} \right). \end{aligned} \quad (2.25)$$

I due vettori al primo membro rappresentano la velocità del punto P e dell'origine O di S , osservati da Σ , che riscriveremo intrinsecamente come \mathbf{v}_Σ e $\mathbf{v}_{O,\Sigma}$, mentre il primo vettore al secondo membro rappresenta la velocità di P osservata da S (che vede i propri versori $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ fissi) e sarà indicata con \mathbf{v}_S . Le velocità caratterizzate dal pedice Σ sono generalmente denominate **velocità assolute**, mentre quelle caratterizzate dal pedice S sono definite **velocità relative**. Queste definizioni, di largo uso, derivano da un privilegio del tutto arbitrario che abbiamo assegnato all'osservatore Σ , decidendo che sia esso ad operare le derivate temporali. In ambito di Cinematica classica tutti gli osservatori sono equivalenti, al contrario della situazione in Dinamica, dove solo gli osservatori inerziali sono privilegiati per scrivere le Leggi di Newton e sono fra loro equivalenti.

Per completare la formula della Cinematica relativa, occorre trovare un'espressione rappresentabile per il secondo vettore del secondo membro di (2.25).

Le formule di Poisson ¹ ed il vettore $\boldsymbol{\omega}$

¹Siméon-Denis Poisson matematico, fisico, astronomo e statistico francese (Pithiviers, 21 giugno 1781 - Parigi, 25 aprile 1840).

Poiché $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ sono versori, le loro derivate rispetto al tempo sono vettori a loro ortogonali. Esprimiamo questa proprietà per mezzo del prodotto vettoriale con vettori da determinare:

$$\begin{aligned}\frac{d\mathbf{i}}{dt} &:= \boldsymbol{\omega}_1 \wedge \mathbf{i} \\ \frac{d\mathbf{j}}{dt} &:= \boldsymbol{\omega}_2 \wedge \mathbf{j} \\ \frac{d\mathbf{k}}{dt} &:= \boldsymbol{\omega}_3 \wedge \mathbf{k} .\end{aligned}\tag{2.26}$$

Per le proprietà del prodotto vettoriale, è evidente che ciascuno dei vettori $\boldsymbol{\omega}_i, i = 1, 2, 3$, ha una componente che può essere scelta in modo arbitrario. Infatti, posto

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\omega}_1 &= \omega_{1x}\mathbf{i} + \omega_{1y}\mathbf{j} + \omega_{1z}\mathbf{k} \\ \boldsymbol{\omega}_2 &= \omega_{2x}\mathbf{i} + \omega_{2y}\mathbf{j} + \omega_{2z}\mathbf{k} \\ \boldsymbol{\omega}_3 &= \omega_{3x}\mathbf{i} + \omega_{3y}\mathbf{j} + \omega_{3z}\mathbf{k} ,\end{aligned}\tag{2.27}$$

le componenti $\omega_{1x}, \omega_{2y}, \omega_{3z}$ non danno alcun contributo ai prodotti vettoriali definiti in (2.26). Per scrivere le (2.26) abbiamo sfruttato le proprietà di normalizzazione dei versori (vettori a modulo costante), ma non abbiamo ancora usato le proprietà di ortogonalità in (2.9). In particolare, poiché tutti i prodotti scalari fra versori diversi sono nulli, saranno nulle anche le loro derivate rispetto al tempo:

$$\begin{aligned}0 &= \frac{d}{dt}(\mathbf{i} \cdot \mathbf{j}) = \frac{d\mathbf{i}}{dt} \cdot \mathbf{j} + \frac{d\mathbf{j}}{dt} \cdot \mathbf{i} = \omega_{1z} - \omega_{2z} , \\ 0 &= \frac{d}{dt}(\mathbf{j} \cdot \mathbf{k}) = \frac{d\mathbf{j}}{dt} \cdot \mathbf{k} + \frac{d\mathbf{k}}{dt} \cdot \mathbf{j} = \omega_{2x} - \omega_{3x} , \\ 0 &= \frac{d}{dt}(\mathbf{k} \cdot \mathbf{i}) = \frac{d\mathbf{k}}{dt} \cdot \mathbf{i} + \frac{d\mathbf{i}}{dt} \cdot \mathbf{k} = \omega_{3y} - \omega_{1y} .\end{aligned}\tag{2.28}$$

Ponendo

$$\begin{aligned}\omega_{1z} &= \omega_{2z} = \omega_z , \\ \omega_{2x} &= \omega_{3x} = \omega_x , \\ \omega_{3y} &= \omega_{1y} = \omega_y .\end{aligned}\tag{2.29}$$

siamo riusciti ad esprimere le tre derivate in (2.26) per mezzo di un solo vettore

$$\boldsymbol{\omega} = \omega_x\mathbf{i} + \omega_y\mathbf{j} + \omega_z\mathbf{k} ,\tag{2.30}$$

rappresentato nel riferimento dell'osservatore S .

Possiamo provare che la derivata temporale di una qualunque grandezza vettoriale rappresentata in S può essere espressa attraverso il prodotto vettoriale con il vettore $\boldsymbol{\omega}$. sia infatti \mathbf{V} una qualunque grandezza vettoriale. La sua rappresentazione in S sarà dunque

$$\mathbf{V} = V_x \mathbf{i} + V_y \mathbf{j} + V_z \mathbf{k}.$$

La sua derivata rispetto al tempo, effettuata dall'osservatore Σ , sarà dunque

$$\left. \frac{d}{dt} \mathbf{V} \right|_{\Sigma} = \left[\dot{V}_x \mathbf{i} + \dot{V}_y \mathbf{j} + \dot{V}_z \mathbf{k} \right] + \left[V_x \frac{d\mathbf{i}}{dt} + V_y \frac{d\mathbf{j}}{dt} + V_z \frac{d\mathbf{k}}{dt} \right] \quad (2.31)$$

e per le (2.26) e (2.30)

$$\left. \frac{d}{dt} \mathbf{V} \right|_{\Sigma} = \left. \frac{d}{dt} \mathbf{V} \right|_S + \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{V}, \quad (2.32)$$

dove il primo termine al secondo membro della (2.31) è interpretato come la derivata di \mathbf{V} fatta da S (che vede i propri versori costanti) ed il secondo termine al secondo membro è conseguenza della formula ottenuta per le derivate dei versori. È immediato vedere che, se \mathbf{V} è un vettore costante in S , allora

$$\left. \frac{d}{dt} \mathbf{V} \right|_{\Sigma} = \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{V}. \quad (2.33)$$

Proviamo adesso che, dati Σ ed S , il vettore $\boldsymbol{\omega}$ è unico.

Consideriamo adesso il caso di un qualunque versore \mathbf{u} di S . Sappiamo che la sua derivata rispetto al tempo, effettuata da Σ , può essere rappresentata dal prodotto vettoriale con $\boldsymbol{\omega}$:

$$\frac{d}{dt} \mathbf{u} = \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{u}.$$

Supponiamo che esista un altro vettore $\boldsymbol{\omega}'$ tale che

$$\frac{d}{dt} \mathbf{u} = \boldsymbol{\omega}' \wedge \mathbf{u}.$$

Sottraendo membro a membro, si ottiene

$$\bar{\mathbf{0}} = (\boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\omega}') \wedge \mathbf{u},$$

che, per l'arbitrarietà di \mathbf{u} , implica

$$\boldsymbol{\omega}' = \boldsymbol{\omega}$$

e, quindi, l'unicità del vettore $\boldsymbol{\omega}$.

Rappresentazione di $\boldsymbol{\omega}$

Iniziamo considerando il caso di due osservatori “piani”, ovvero di due osservatori, rispettivamente Σ ed S , che, durante il loro moto relativo, mantengano costantemente parallele fra loro due direzioni (ad esempio \mathbf{e}_3 e \mathbf{k}).² In questo caso è semplice mettere in relazione le direzioni individuate dai versori $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}\}$ di S e quelle individuate dai versori di Σ , $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ per mezzo di un solo angolo. Infatti, sia ad esempio ϕ l'angolo formato dalle direzioni positive individuate da \mathbf{e}_1 e \mathbf{i} , avremo che (si veda la Fig. 2.3)

$$\mathbf{i} = \cos \phi \mathbf{e}_1 + \sin \phi \mathbf{e}_2 \quad (2.34)$$

$$\mathbf{j} = -\sin \phi \mathbf{e}_1 + \cos \phi \mathbf{e}_2 .$$

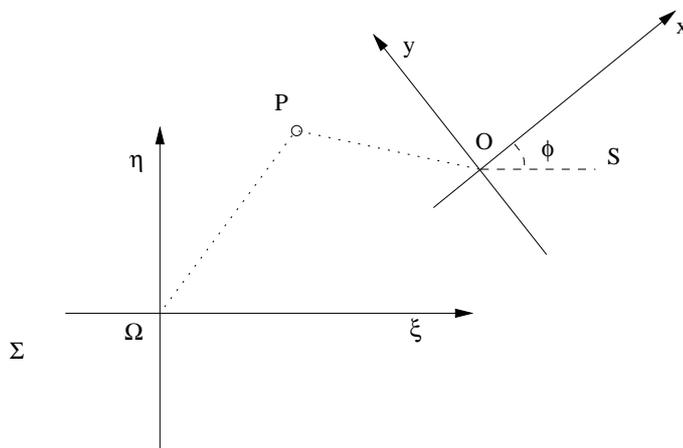


Figura 2.3

La matrice dei coseni direttori (matrice di rotazione), in questo caso si scrive esplicitamente in funzione del solo angolo ϕ ed essendo $\mathbf{k} \equiv \mathbf{e}_3$, avremo

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} \cos \phi & \sin \phi & 0 \\ -\sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (2.35)$$

²In generale, per rappresentare $\boldsymbol{\omega}$ per mezzo della derivata temporale di una coordinata angolare, basta che due versori, ad esempio \mathbf{e}_3 e \mathbf{k} , mantengano costante l'angolo fra le loro direzioni. Per semplicità abbiamo scelto che questo angolo sia costantemente nullo.

che, per trasformazioni che interessano solo vettori o coordinate del piano comune ai due osservatori, può essere usata nella forma ridotta di matrice 2×2 :

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} \cos \phi & \sin \phi \\ -\sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix}. \quad (2.36)$$

Sappiamo dalle formule di Poisson che possiamo esprimere le derivate temporali di \mathbf{i} e \mathbf{j} , effettuate da Σ , per mezzo del prodotto vettoriale a sinistra con il vettore $\boldsymbol{\omega}$. In questo caso, avendo l'espressione esplicita della trasformazione (2.34), possiamo identificare $\boldsymbol{\omega}$. Infatti

$$\frac{d}{dt}\mathbf{i} = \dot{\phi}(-\sin \phi \mathbf{e}_1 + \cos \phi \mathbf{e}_2) \quad (2.37)$$

$$\frac{d}{dt}\mathbf{j} = \dot{\phi}(-\cos \phi \mathbf{e}_1 - \sin \phi \mathbf{e}_2).$$

Confrontando le (2.37) con le (2.34) si vede che le (2.37) possono essere scritte come

$$\frac{d}{dt}\mathbf{i} = \dot{\phi}\mathbf{j} = \dot{\phi}\mathbf{k} \wedge \mathbf{i} \quad (2.38)$$

$$\frac{d}{dt}\mathbf{j} = -\dot{\phi}\mathbf{i} = \dot{\phi}\mathbf{k} \wedge \mathbf{j}$$

In questo caso, quindi, il vettore $\boldsymbol{\omega}$ ha direzione costante e verso e modulo sono determinati dalla parte scalare $\dot{\phi}$, detta velocità angolare.

$\boldsymbol{\omega}$ come matrice antisimmetrica

Riprendiamo le trasformazioni fra vettori di S e di Σ espresse per mezzo delle matrici di rotazione. In particolare deriviamo rispetto al tempo (derivata operata da Σ) la relazione (2.17):

$$(\dot{\xi} - \dot{\xi}_O, \dot{\eta} - \dot{\eta}_O, \dot{\zeta} - \dot{\zeta}_O)^T = \frac{d}{dt}(\mathbb{A}^T(x, y, z)^T) = \left(\frac{d}{dt}\mathbb{A}^T \right) (x, y, z)^T + \mathbb{A}^T(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})^T. \quad (2.39)$$

Il secondo termine al secondo membro di (2.39) rappresenta la velocità di P osservata da S , espressa nel riferimento di Σ attraverso l'applicazione di \mathbb{A}^T . Prendiamo in esame adesso il primo termine al secondo membro di (2.39).

Poiché $\mathbb{A}\mathbb{A}^T = \mathbb{I}$, è lecito scrivere:

$$\left(\frac{d}{dt}\mathbb{A}^T \right) (x, y, z)^T = \left(\frac{d}{dt}\mathbb{A}^T \right) \mathbb{A}\mathbb{A}^T(x, y, z)^T. \quad (2.40)$$

Osserviamo adesso che

$$\mathbb{O} = \frac{d}{dt}\mathbb{I} = \frac{d}{dt}(\mathbb{A}^T\mathbb{A}) = \left(\frac{d}{dt}\mathbb{A}^T \right) \mathbb{A} + \mathbb{A}^T \left(\frac{d}{dt}\mathbb{A} \right), \quad (2.41)$$

dove \mathbb{O} rappresenta la matrice nulla. Abbiamo quindi

$$\mathbb{A}^T \left(\frac{d}{dt} \mathbb{A} \right) = - \left(\frac{d}{dt} \mathbb{A}^T \right) \mathbb{A}. \quad (2.42)$$

Ricordiamo che, date due matrici per le quali sia definito il prodotto righe per colonne, \mathbb{X}, \mathbb{Y} , vale $(\mathbb{X}^T \mathbb{Y})^T = \mathbb{Y}^T \mathbb{X}$. Quindi, nel nostro caso, abbiamo che

$$\left(\left(\frac{d}{dt} \mathbb{A}^T \right) \mathbb{A} \right)^T = \mathbb{A}^T \frac{d}{dt} \mathbb{A}. \quad (2.43)$$

Confrontando (2.42) con (2.43) vediamo che

$$\left(\left(\frac{d}{dt} \mathbb{A}^T \right) \mathbb{A} \right)^T = - \left(\frac{d}{dt} \mathbb{A}^T \right) \mathbb{A}, \quad (2.44)$$

ovvero che la trasposta di $\left(\frac{d}{dt} \mathbb{A}^T \right) \mathbb{A}$ coincide con la matrice opposta (di segno opposto). Quindi, necessariamente $\left(\frac{d}{dt} \mathbb{A}^T \right) \mathbb{A}$ deve essere una matrice antisimmetrica, cioè della forma

$$\begin{pmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.45)$$

Tornando alla (2.40), osserviamo che la matrice \mathbb{A}^T applicata a $(x, y, z)^T$ riporta il vettore $(P - O)$ dalla rappresentazione in S a quella in Σ . Possiamo quindi scrivere che

$$\mathbb{A}^T(x, y, z)^T = (\xi_P - \xi_O, \eta_P - \eta_O, \zeta_P - \zeta_O)^T.$$

Se, inoltre, rappresentiamo la matrice antisimmetrica $\left(\frac{d}{dt} \mathbb{A}^T \right) \mathbb{A}$ nella forma seguente

$$\left(\frac{d}{dt} \mathbb{A}^T \right) \mathbb{A} = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_{\Sigma,3} & \omega_{\Sigma,2} \\ \omega_{\Sigma,3} & 0 & -\omega_{\Sigma,1} \\ -\omega_{\Sigma,2} & \omega_{\Sigma,1} & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.46)$$

si vede facilmente che

$$\left(\frac{d}{dt} \mathbb{A}^T \right) \mathbb{A} (\xi_P - \xi_O, \eta_P - \eta_O, \zeta_P - \zeta_O)^T = \boldsymbol{\omega} \wedge (P - O)$$

dove $\boldsymbol{\omega} = (\omega_{\Sigma,1}, \omega_{\Sigma,2}, \omega_{\Sigma,3})^T$ è espresso in (2.46) nella rappresentazione di Σ . Una matrice antisimmetrica 3×3 è definita da tre soli elementi e la

sua applicazione ad un vettore di \mathbb{R}^3 può essere rappresentata dal prodotto vettoriale con un opportuno vettore che ha per componenti i tre elementi della matrice. Il vettore $\boldsymbol{\omega}$ ed il prodotto vettoriale sono tuttavia invarianti solo per trasformazioni ortogonali, che conservano lo stesso ordine dei versori. Sono invarianti quindi solo se si applicano matrici ortogonali con determinante 1. Si ricordi che le trasformazioni ortogonali con determinante -1 (trasformazioni da terna di mano destra a terna di mano sinistra, trasformazioni “attraverso lo specchio”) ne modificano l’ordine e, quindi, il segno.

Osserviamo che la (2.39) e, ovviamente la (2.40), forniscono una relazione che, attraverso le matrici di rotazione e la loro derivata, è esplicitamente rappresentata dall’osservatore Σ . Una forma più semplice si ottiene se se ne dà una formulazione intrinseca, evitando la rappresentazione di uno dei due osservatori. La (2.39) si scrive quindi come

$$\mathbf{v}_\Sigma = \mathbf{v}_{O,\Sigma} + \boldsymbol{\omega} \wedge (P - O) + \mathbf{v}_S, \quad (2.47)$$

dove \mathbf{v}_Σ e $\mathbf{v}_{O,\Sigma}$ sono le velocità, rispettivamente, del punto P e del punto O osservate da Σ (**velocità assolute**) e \mathbf{v}_S è la velocità di P osservata da S (**velocità relativa**). La (2.47) è indubbiamente la formulazione più semplice per esprimere la legge di trasformazione della velocità di un punto fra due osservatori e l’introduzione del vettore $\boldsymbol{\omega}$ ha forti ragioni per il suo significato cinematico (già visto nel caso piano), resta però il fatto che per utilizzare la (2.47) occorre una sua rappresentazione rispetto ad un solo osservatore, che può essere Σ o S a seconda delle circostanze.

Accelerazione relativa

Consideriamo la (2.47) e deriviamola rispetto al tempo, dal punto di vista dell’osservatore Σ :

$$\mathbf{a}_\Sigma = \mathbf{a}_{O,\Sigma} + \dot{\boldsymbol{\omega}} \wedge (P - O) + \boldsymbol{\omega} \wedge \frac{d}{dt}(P - O) + \frac{d}{dt}\mathbf{v}_S. \quad (2.48)$$

Prendiamo in esame gli ultimi due termini al secondo membro della (2.48). Se rappresentiamo $(P - O)$ e \mathbf{v}_S con le direzioni e le coordinate di S , avremo che $(P - O) = (x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k})$ e $\mathbf{v}_S = (\dot{x}\mathbf{i} + \dot{y}\mathbf{j} + \dot{z}\mathbf{k})$ e quindi

$$\frac{d}{dt}(P - O) = (\dot{x}\mathbf{i} + \dot{y}\mathbf{j} + \dot{z}\mathbf{k}) + \left(x \frac{d}{dt}\mathbf{i} + y \frac{d}{dt}\mathbf{j} + z \frac{d}{dt}\mathbf{k} \right) = \mathbf{v}_S + \boldsymbol{\omega} \wedge (P - O) \quad (2.49)$$

e

$$\frac{d}{dt}\mathbf{v}_S = (\ddot{x}\mathbf{i} + \ddot{y}\mathbf{j} + \ddot{z}\mathbf{k}) + \left(\dot{x} \frac{d}{dt}\mathbf{i} + \dot{y} \frac{d}{dt}\mathbf{j} + \dot{z} \frac{d}{dt}\mathbf{k} \right) = \mathbf{a}_S + \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{v}_S. \quad (2.50)$$

La relazione fra l'accelerazione osservata da Σ (**accelerazione assoluta**) e quella osservata da S (**accelerazione relativa**) è dunque

$$\mathbf{a}_\Sigma = \mathbf{a}_{O,\Sigma} + \boldsymbol{\omega} \wedge [\boldsymbol{\omega} \wedge (P - O)] + \dot{\boldsymbol{\omega}} \wedge (P - O) + 2\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{v}_S + \mathbf{a}_S = \mathbf{a}_T + \mathbf{a}_C + \mathbf{a}_S, \quad (2.51)$$

dove

- $\mathbf{a}_T = \mathbf{a}_{O,\Sigma} + \boldsymbol{\omega} \wedge [\boldsymbol{\omega} \wedge (P - O)] + \dot{\boldsymbol{\omega}} \wedge (P - O)$ è la cosiddetta **accelerazione di trascinamento**, dovuta al solo moto di S rispetto a Σ .

Questi termini sono presenti anche se il punto P è fermo rispetto ad S . Il termine $\mathbf{a}_{O,\Sigma}$ è presente se il moto di S rispetto a Σ presenta un'accelerazione di traslazione, il termine $\boldsymbol{\omega} \wedge [\boldsymbol{\omega} \wedge (P - O)]$ rappresenta un'accelerazione di tipo centripeto verso il punto O ed è sempre presente se S cambia le proprie direzioni rispetto a Σ ed il termine $\dot{\boldsymbol{\omega}} \wedge (P - O)$ è presente se il vettore $\boldsymbol{\omega}$ non è costante nel tempo.

- $\mathbf{a}_C = 2\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{v}_S$ è la cosiddetta **accelerazione di Coriolis**.

Questo termine è nullo se $\boldsymbol{\omega} = 0$ e se $\boldsymbol{\omega}$ e \mathbf{v}_S sono paralleli. È ovviamente nullo se P è fermo rispetto all'osservatore S . Quando $\mathbf{a}_C \neq 0$, questa accelerazione (ortogonale rispetto alla velocità relativa \mathbf{v}_S) provoca, per l'osservatore Σ , un incurvamento della traiettoria di P .

- \mathbf{a}_S è l'accelerazione relativa, ovvero l'accelerazione di P osservata da S .

Capitolo 3

Sistemi rigidi

3.1 Definizione e gradi di libertà

Si definisce **sistema rigido** un sistema materiale \mathfrak{R} , dotato di una massa m , i cui punti mantengono invariata la reciproca distanza durante il moto. Per semplicità di notazione, considereremo un sistema discreto formato da n punti materiali P_i dotati ciascuno di una massa m_i , $i = 1, 2, \dots, n$, per cui $m = \sum_{i=1}^n m_i$. L'estensione dei risultati che otterremo ai sistemi con distribuzione "continua" di massa è pressoché immediata e sarà considerata in seguito. Si intende per sistemi materiali continui quei sistemi dove è definita una funzione della posizione $\rho(P)$, detta densità di massa, che sia almeno integrabile secondo Riemann,¹ e tale che $\int_C \rho(P) d^3P = m$, dove m è la massa totale e C la regione di \mathbb{R}^3 dove è distribuita la massa.

La condizione di rigidità per un sistema discreto può essere espressa imponendo

$$|P_i - P_j| = r_{ij} = \text{costante}, \quad \forall i \neq j = 1, 2, \dots, n. \quad (3.1)$$

Indichiamo con $\mathfrak{R}_{1,2}$ un sistema rigido costituito da due soli punti, P_1 e P_2 . È immediato verificare che è dotato di cinque gradi di libertà. Infatti, rispetto ad un osservatore Σ che ne osserva il moto in \mathbb{R}^3 , occorreranno tre coordinate per individuare il punto P_1 ed altre due per individuare la posizione di P_2 sulla superficie sferica di centro P_1 e raggio r_{12} .

¹Georg Friedrich Bernhard Riemann, matematico e fisico tedesco (Breselenz, 17 settembre 1826 - Selasca, 20 luglio 1866).

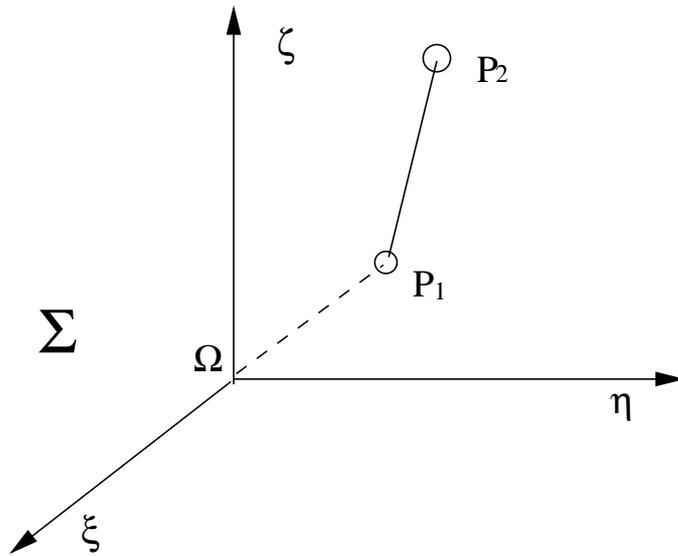


Figura 3.1 Sistema rigido composto da due punti

Un modo alternativo per calcolare il numero di gradi di libertà del sistema è quello di considerare che due punti liberi in \mathbb{R}^3 hanno sei gradi di libertà, ma che fra di essi sussiste una relazione vincolare, espressa dalla (3.1), che li riduce a cinque.

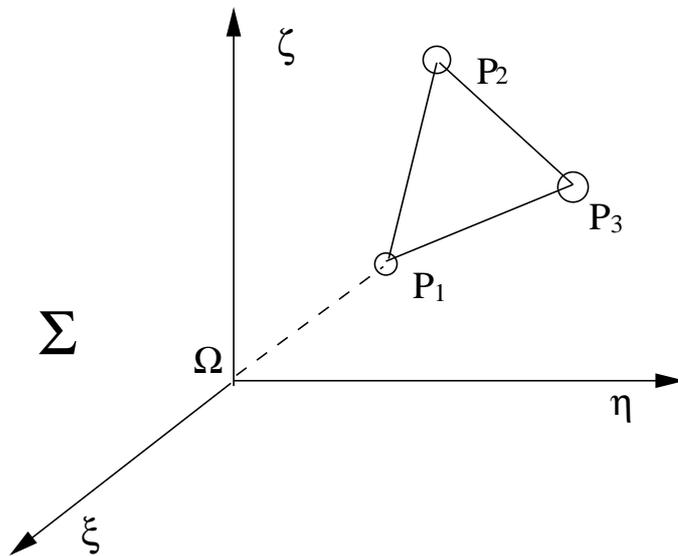


Figura 3.2 Sistema rigido composto da tre punti

Possiamo fare un conto analogo se consideriamo un sistema rigido composto da tre punti non allineati. Il sistema, se fosse libero, avrebbe nove gradi

di libertà, ma per mantenere rigida la maglia triangolare, occorrono tre relazioni vincolari indipendenti del tipo (3.1), che riducono a sei i gradi di libertà del sistema. Alternativamente, possiamo considerare che l'aggiunta del punto P_3 al sistema $\mathfrak{R}_{1,2}$ comporta un aumento di un grado di libertà del sistema stesso, poiché, a causa dei vincoli di rigidità, il punto P_3 può solo ruotare attorno all'asse P_1P_2 e, quindi, basterà un angolo per individuarne la posizione rispetto agli altri due punti. La maglia triangolare $\mathfrak{R}_{1,2,3}$, costituita da tre punti fra loro rigidamente vincolati, rappresenta (per quanto riguarda il numero di gradi di libertà del sistema) il sistema rigido più generale perché l'aggiunta di punti rigidamente connessi a $\mathfrak{R}_{1,2,3}$ non ne aumenta il numero di gradi di libertà. Infatti, se aggiungiamo un punto P_4 a $\mathfrak{R}_{1,2,3}$, aumentiamo di tre il numero di gradi di libertà (P_4 punto libero), ma per connetterlo rigidamente agli altri punti occorrono tre relazioni vincolari del tipo (3.1) per costituire un tetraedro rigido $\mathfrak{R}_{1,2,3,4}$, che ha, pertanto, sei gradi di libertà come $\mathfrak{R}_{1,2,3}$.

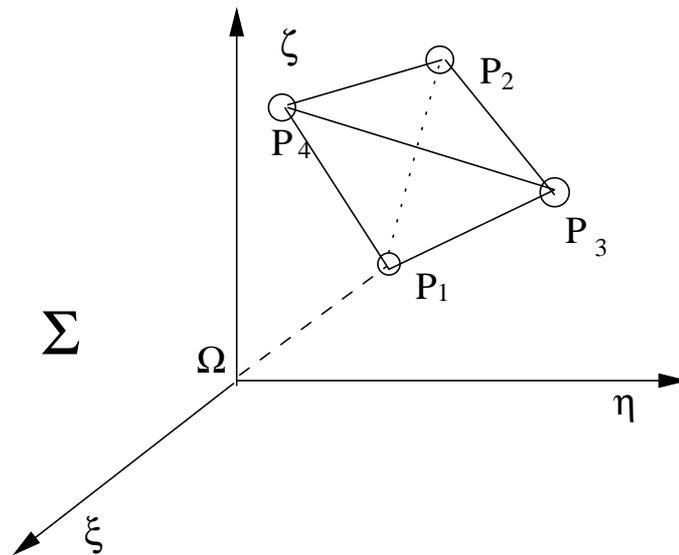


Figura 3.3 Sistema rigido composto da tre punti

In conclusione il sistema rigido discreto, composto da un numero finito qualunque di punti materiali, $\{P_i, m_i\}$, $i = 1, 2, \dots, n$, che indicheremo con \mathfrak{R}_n , ha sei gradi di libertà. Si tratta adesso di trovare dei sistemi di coordinate adatte ad esprimerli.

L'osservatore solidale.

È semplice stabilire che il moto di un corpo rigido \mathfrak{R}_n rispetto ad un osservatore Σ è rappresentabile dal moto di un osservatore S **solidale** rispetto ad \mathfrak{R}_n . Ricordiamo che un osservatore è rappresentato da una terna euclidea di mano destra e da un cronometro per misurare il tempo (tempo che, in ambito classico, è lo stesso per tutti gli osservatori). Con il termine solidale si intende caratterizzare quegli osservatori (ovviamente infiniti) che vedono fermi tutti i punti di \mathfrak{R}_n , indipendentemente dal moto che \mathfrak{R}_n effettua rispetto ad altri osservatori. L'osservatore solidale S conosce la posizione di tutti i punti di \mathfrak{R}_n , che sono individuati da coordinate scelte da S e che, per S , restano costanti nel tempo. Per studiare il moto di \mathfrak{R}_n rispetto a Σ basterà quindi studiare il moto di S rispetto a Σ per trasferire tutta la “conoscenza” che S ha di \mathfrak{R}_n all'osservatore Σ .

Vediamo un modo per costruire una terna ortonormale solidale con il rigido. Scegliamo l'origine O di S coincidente con il punto P_1 di \mathfrak{R}_n e prendiamo come primo asse del riferimento la retta orientata che va da P_1 a P_2 ; poniamo cioè $\mathbf{i} = \frac{(P_2 - P_1)}{|P_2 - P_1|} := \text{vers}(P_2 - P_1)$. Scegliamo come secondo asse quello individuato dal versore $\mathbf{j} = \mathbf{i} \wedge \frac{(P_3 - P_1)}{|P_3 - P_1|}$, sicuramente ortogonale al primo asse. Il terzo asse del riferimento, individuato dal versore \mathbf{k} , si ottiene dal prodotto vettoriale $\mathbf{k} = \mathbf{i} \wedge \mathbf{j}$.

3.2 Cinematica dei Rigidi

I risultati ottenuti nel paragrafo di Cinematica relativa sono di grande aiuto per stabilire formule per velocità ed accelerazione nel caso di moti di sistemi rigidi. Consideriamo infatti le formule (2.47) e (2.51). Nel caso che P sia un punto di un sistema rigido e che S sia un osservatore solidale al rigido stesso (che quindi vede P fermo) le formule fondamentali della cinematica dei rigidi (in forma intrinseca, cioè indipendente dalla scelta dell'osservatore in cui rappresentarle) si ottengono immediatamente:

$$\mathbf{v}(P) = \mathbf{v}(O) + \boldsymbol{\omega} \wedge (P - O), \quad (3.2)$$

$$\mathbf{a}(P) = \mathbf{a}(O) + \boldsymbol{\omega} \wedge [\boldsymbol{\omega} \wedge (P - O)] + \dot{\boldsymbol{\omega}} \wedge (P - O), \quad (3.3)$$

dove $\mathbf{v}(\cdot)$ e $\mathbf{a}(\cdot)$ sono, rispettivamente, la velocità e l'accelerazione del punto indicato in parentesi, osservate dal riferimento fisso Σ .

Invariante scalare e asse istantaneo di moto.

Consideriamo la formula fondamentale della cinematica dei sistemi rigidi, espressa dalla (3.2) e moltiplichiamo ambo i membri scalarmente per $\boldsymbol{\omega}$. Poiché $\boldsymbol{\omega} \wedge (P - O)$ è un vettore perpendicolare ad $\boldsymbol{\omega}$, si ottiene

$$\mathbf{v}(P) \cdot \boldsymbol{\omega} = \mathbf{v}(O) \cdot \boldsymbol{\omega} , \quad (3.4)$$

ovvero, per l'osservatore fisso Σ , tutti i punti che partecipano al moto rigido hanno ad ogni istante la stessa componente della velocità parallela ad $\boldsymbol{\omega}$. La (3.4) è definita come **invariante scalare della velocità** nei moti rigidi. La velocità (3.2) può dunque essere riscritta nella forma

$$\mathbf{v}(P) = \mathbf{v}_{\parallel}(P) + \mathbf{v}_{\perp}(P) = \mathbf{v}_{\parallel}(O) + \mathbf{v}_{\perp}(O) + \boldsymbol{\omega} \wedge (P - O) , \quad (3.5)$$

dove, se $\boldsymbol{\omega} \neq 0$, il componente della velocità di P parallelo ad $\boldsymbol{\omega}$, \mathbf{v}_{\parallel} , è

$$\mathbf{v}_{\parallel}(P) = \frac{\mathbf{v}(O) \cdot \boldsymbol{\omega}}{\boldsymbol{\omega}^2} \boldsymbol{\omega} . \quad (3.6)$$

Vediamo adesso se esistono dei punti P , che partecipano al moto rigido, per i quali si annulli la componente della velocità $\mathbf{v}_{\perp}(P)$, ortogonale ad $\boldsymbol{\omega}$. Questo implica la soluzione dell'equazione vettoriale

$$\mathbf{v}_{\perp}(P) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \mathbf{v}_{\perp}(O) + \boldsymbol{\omega} \wedge (P - O) = 0 , \quad (3.7)$$

cioè

$$\mathbf{v}_{\perp}(O) = (P - O) \wedge \boldsymbol{\omega} . \quad (3.8)$$

La (3.8), se risolubile, ammette infinite soluzioni, perché nel prodotto vettoriale la componente di $(P - O)$ parallela ad $\boldsymbol{\omega}$ non dà contributo. Per risolvere la (3.8), individuiamo un punto A sul piano π passante per O ed ortogonale ad $\boldsymbol{\omega}$, in modo che $(A - O)$, $\boldsymbol{\omega}$ e $\mathbf{v}_{\perp}(O)$ costituiscano una terna ortogonale di mano destra. Se questo punto risolve l'equazione

$$\mathbf{v}_{\perp}(O) = (A - O) \wedge \boldsymbol{\omega} , \quad (3.9)$$

allora tutti i punti della retta di equazione (in forma vettoriale)

$$(P - O) = (A - O) + \lambda \boldsymbol{\omega} , \quad \lambda \in \mathbb{R} \quad (3.10)$$

risolvono la (3.8). Per risolvere la (3.9) moltiplichiamone a destra per $\boldsymbol{\omega}$ ambo i membri:

$$\mathbf{v}_{\perp}(O) \wedge \boldsymbol{\omega} = [(A - O) \wedge \boldsymbol{\omega}] \wedge \boldsymbol{\omega} = -\boldsymbol{\omega}^2 (A - O) , \quad (3.11)$$

dove l'ultimo passaggio è il risultato dello svolgimento del doppio prodotto vettoriale ². Il punto A cercato sul piano π è dunque dato da

$$(A - O) = \frac{\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{v}_\perp(O)}{\omega^2} = \frac{\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{v}(O)}{\omega^2}. \quad (3.12)$$

Esiste quindi tutta una retta di equazione

$$(P - O) = (A - O) + \lambda \boldsymbol{\omega} = \frac{\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{v}(O)}{\omega^2} + \lambda \boldsymbol{\omega}, \quad \lambda \in \mathbb{R} \quad (3.13)$$

i cui punti hanno (se l'invariante scalare non è nullo) velocità parallela ad $\boldsymbol{\omega}$. La retta rappresentata da (3.13) è detta **asse istantanea di moto**, o **asse di istantanea rotazione** o anche **asse di Mozzi** ³ le cui equazioni in componenti sono

$$\frac{x - x_A}{\omega_x} = \frac{y - y_A}{\omega_y} = \frac{z - z_A}{\omega_z}$$

dove x, y, z sono le coordinate del punto P e x_A, y_A, z_A sono date dalla (3.12):

$$x_A = \frac{\omega_y v_z - \omega_z v_y}{\omega^2}, \quad y_A = \frac{\omega_z v_x - \omega_x v_z}{\omega^2}, \quad z_A = \frac{\omega_x v_y - \omega_y v_x}{\omega^2}.$$

Unicità dell'asse di moto.

È facile dimostrare che l'asse di moto è unica, cioè che non varia al variare della scelta del polo O per scrivere la distribuzione delle velocità. Supponiamo infatti di scrivere la velocità di un punto P , utilizzando un diverso polo O' . La formula (3.2) si scriverà come

$$\mathbf{v}(P) = \mathbf{v}(O') + \boldsymbol{\omega} \wedge (P - O'). \quad (3.14)$$

Abbiamo già visto che la componente della velocità parallela ad $\boldsymbol{\omega}$ (l'invariante scalare) è la stessa per tutti i punti e quindi non varia al variare della scelta del polo O . Se cerchiamo l'asse di moto a partire dal nuovo polo O' , possiamo procedere come in precedenza: risolviamo la (3.8), partendo da (3.14), individuando un punto A' sul piano π' passante per O' ed ortogonale ad $\boldsymbol{\omega}$, in modo che $(A' - O')$, $\boldsymbol{\omega}$ e $\mathbf{v}_\perp(O')$ costituiscano una terna ortogonale di mano destra. Otterremo ovviamente che il punto A' esiste e soddisfa la relazione

$$(A' - O') = \frac{\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{v}(O')}{\omega^2}. \quad (3.15)$$

²Ricordiamo la formula del doppio prodotto vettoriale: $(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) \wedge \mathbf{c} = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})\mathbf{a}$.

³Giulio Giuseppe Mozzi del Garbo, matematico, politico e poeta italiano (Firenze, 23 febbraio 1730 - Firenze, 16 aprile 1813).

Sottraiamo la (3.15) dalla (3.12):

$$(A - O) - (A' - O') = \frac{\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{v}(O)}{\omega^2} - \frac{\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{v}(O')}{\omega^2} = \frac{1}{\omega^2} (\boldsymbol{\omega} \wedge (\mathbf{v}(O) - \mathbf{v}(O'))) , \quad (3.16)$$

dove, poi

$$(A - O) - (A' - O') = (A - O') + (O' - O) - (A' - O') = (A - A') + (O' - O)$$

e, dalla formula fondamentale della cinematica dei rigidi (vedi (3.2))

$$\mathbf{v}(O) - \mathbf{v}(O') = \boldsymbol{\omega} \wedge (O - O')$$

Svolgendo il doppio prodotto vettoriale

$$\boldsymbol{\omega} \wedge (\boldsymbol{\omega} \wedge (O - O')) = [(O - O') \cdot \boldsymbol{\omega}] \boldsymbol{\omega} - (O - O') \omega^2.$$

Sostituendo questi risultati in (3.16), otteniamo dunque

$$(A - A') + (O' - O) = \frac{1}{\omega^2} ([(O - O') \cdot \boldsymbol{\omega}] \boldsymbol{\omega} - (O - O') \omega^2) ,$$

ovvero

$$(A - A') = \frac{1}{\omega^2} [(O - O') \cdot \boldsymbol{\omega}] \boldsymbol{\omega} . \quad (3.17)$$

A e A' giacciono sulla stessa retta parallela ad $\boldsymbol{\omega}$ e la prova dell'unicità dell'asse di moto è conclusa. \square

Poiché, in generale, al variare del tempo, $\boldsymbol{\omega}$ varia in direzione, oltre che in modulo, l'asse istantaneo di moto descrive una superficie rispetto all'osservatore fisso (rigata fissa) ed una diversa superficie rispetto all'osservatore mobile (rigata mobile). Le due superfici sono tangenti fra loro ad ogni istante t lungo la retta che costituisce, a quell'istante, l'asse istantaneo di moto. Le due superfici descritte dalle successive posizioni assunte dall'asse istantaneo di moto rispetto ai due osservatori (fisso e solidale) si muovono dunque rotolando e strisciando l'una sull'altra. Questa caratterizzazione del moto rigido mostra che, nel caso generale, l'atto di moto "istantaneo" risulta scomponibile in un moto traslatorio parallelo alla direzione di $\boldsymbol{\omega}$ in quell'istante (con velocità uguale all'invariante scalare (3.6)) ed un moto di rotazione attorno all'asse istantaneo di moto. L'atto di moto rigido "istantaneo" è dunque un atto di moto elicoidale, del tipo di quello di una vite che avanza ruotando attorno al proprio asse.

Nel caso in cui la direzione di $\boldsymbol{\omega}$ sia costante, le due rigate sono superfici cilindriche (generate cioè da una retta che resta sempre parallela a se stessa). Nel caso in cui l'invariante scalare (3.6) sia nullo, le due rigate rotolano l'una sull'altra senza strisciare. In questo caso la rappresentatività del moto rigido può essere ristretta alle curve sezione fra la rigata fissa ed un piano ortogonale ad $\boldsymbol{\omega}$ (**base**) e fra la rigata mobile e lo stesso piano (**rulletta**).

La teoria che si sviluppa a partire dai sopra citati aspetti geometrici del moto rigido è alla base della costruzione degli ingranaggi, ovvero di quei meccanismi che trasformano un tipo di moto rigido in un altro tipo di moto rigido.

Elenchiamo adesso alcuni moti rigidi particolari, dandone la terminologia d'uso ed il numero di gradi di libertà, partendo dalla formula fondamentale (3.2):

- se $\boldsymbol{\omega} = \mathbf{0}$, il moto rigido è un **moto traslatorio**, che presenta tre gradi di libertà;
- se $\mathbf{v}(O) = \mathbf{0}$, esiste un punto fisso del sistema rigido ed il moto è un **moto di precessione**, cui corrispondono tre gradi di libertà;
- se $\mathbf{v}(O) = \mathbf{0}$ e $\boldsymbol{\omega}$ ha direzione costante, esiste un asse fisso del sistema rigido ed il moto è un **moto di rotazione**, cui corrisponde un grado di libertà;
- se $\mathbf{v}_{\parallel}(O) \neq \mathbf{0}$ e l'asse di rotazione è fisso, il moto è un **moto elicoidale**, cui corrispondono due gradi di libertà.
- se $\mathbf{v}_{\parallel}(O) = \mathbf{0}$ e $\boldsymbol{\omega}$ ha direzione costante, il moto è un **moto rigido piano**, cui corrispondono tre gradi di libertà.

3.3 Teorema di Eulero

Un risultato particolarmente importante in cinematica dei sistemi rigidi è costituito dal teorema di Eulero ⁴. Ricordiamo che la configurazione di un sistema rigido rispetto ad un osservatore fisso Σ è nota se è conosciuta la posizione di un suo punto qualsiasi, diciamo O , e la matrice di rotazione \mathbb{A} , caratterizzante la configurazione di una terna S , avente origine in O , solidale al sistema rigido stesso. Trascurando la traslazione fra le origini dei due osservatori e considerando quindi $O \equiv \Omega$, origine di Σ , e quindi come un punto fisso, possiamo seguire il moto del sistema rigido attorno al suo punto O seguendo l'evoluzione nel tempo della matrice \mathbb{A} . Se facciamo inizialmente coincidere la terna S con la terna fissa Σ , avremo che all'istante iniziale $\mathbb{A}(t_0) = \mathbb{I}$, quindi $\mathbb{A}(t_0)$ ha tre autovalori coincidenti ed uguali ad uno. Al passare del tempo $\mathbb{A}(t)$, per l'ipotesi di continuità del moto e per la sua proprietà di essere una matrice ortogonale di determinante uguale ad uno, ammetterà $\forall t \in \mathbb{R}$ considerato, sempre almeno un autovalore reale ed uguale

⁴Leonhard Euler, matematico e fisico svizzero (Basilea, 15 aprile 1707 - San Pietroburgo, 18 settembre 1783).

ad uno. Questo significa che, fissati t_0 ed un qualunque $t_1 > t_0$, esiste sempre un punto P , solidale al rigido, tale che, posto $(P - O) = \mathbf{r}_P$, allora

$$\mathbb{A}(t_1)\mathbf{r}_P = \mathbf{r}_P.$$

Questo significa che possiamo sempre riportare un sistema rigido (con un punto fisso) da una configurazione iniziale ad una finale mediante una rotazione attorno ad un asse fisso, che non è in generale l'asse di moto.

Riassumiamo questo risultato nell'enunciato del seguente

Teorema di Eulero 3.3.1 *Sia dato un corpo rigido \mathfrak{R} con un punto fisso O . In ogni suo moto possibile, la configurazione raggiunta ad un qualunque tempo $\tau > t_0$ può essere realizzata con una rotazione attorno ad un asse fisso passante per O . Tale asse dipende dal tempo τ scelto e, in generale, varia al variare di esso.*

3.4 Angoli di Eulero

Consideriamo due terne di mano destra, (Ω, Σ) , fissa, e (O, S) , solidale al sistema rigido considerato, rispettivamente di versori $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ e $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$, con origine comune $\Omega \equiv O$. È possibile passare dall'una all'altra mediante l'applicazione di tre successive matrici di rotazione.

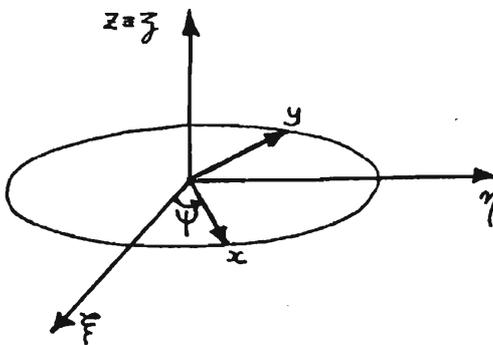


Figura 3.4 Angolo di precessione

La prima rotazione (in senso antiorario, scelto come positivo) di un angolo ψ , detto **angolo di precessione**, è effettuata attorno all'asse individuato dal versore \mathbf{e}_3 , che resta dunque invariato e porta la terna Σ a coincidere con una nuova terna Σ' di versori $(\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3 \equiv \mathbf{e}_3)$, ottenuti dall'applicazione della prima matrice di rotazione \mathbb{A}_ψ alla terna dei versori di Σ (si veda la Fig.

3.4). Il nuovo versore \mathbf{e}'_1 individua adesso una retta, denominata **linea dei nodi**, e sarà di conseguenza indicato come \mathbf{N} :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{e}'_1 \equiv \mathbf{N} \\ \mathbf{e}'_2 \\ \mathbf{e}'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \psi & \sin \psi & 0 \\ -\sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \psi \mathbf{e}_1 + \sin \psi \mathbf{e}_2 \\ -\sin \psi \mathbf{e}_1 + \cos \psi \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}_3 \end{pmatrix}. \quad (3.18)$$

La seconda rotazione, di un angolo ϑ , detto **angolo di nutazione** (sempre in verso positivo antiorario) viene effettuata avendo come asse la linea dei nodi e lascia quindi invariante il versore $\mathbf{N} \equiv \mathbf{e}'_1$.

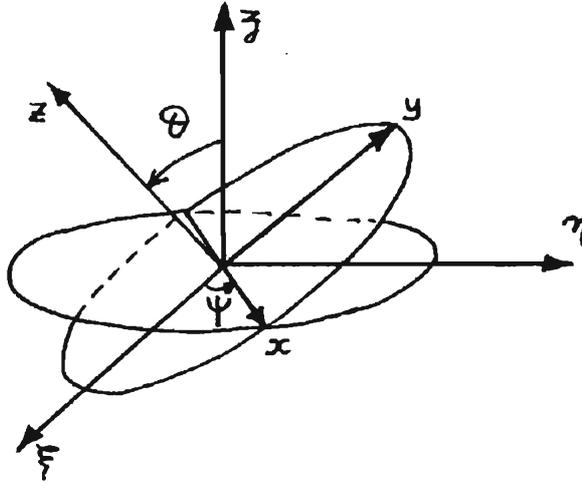


Figura 3.5 Angolo di nutazione

Questa rotazione porta la terna Σ' in una nuova terna Σ'' , di versori $(\mathbf{e}''_1, \mathbf{e}''_2, \mathbf{e}''_3)$ che si ottengono dall'applicazione della seconda matrice di rotazione \mathbb{A}_ϑ alla terna dei versori di Σ' (si veda la Fig. 3.5):

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \mathbf{e}''_1 \\ \mathbf{e}''_2 \\ \mathbf{e}''_3 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \vartheta & \sin \vartheta \\ 0 & -\sin \vartheta & \cos \vartheta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{N} \equiv \mathbf{e}'_1 \\ \mathbf{e}'_2 \\ \mathbf{e}'_3 \equiv \mathbf{e}_3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos \psi \mathbf{e}_1 + \sin \psi \mathbf{e}_2 \\ -\sin \psi \cos \vartheta \mathbf{e}_1 + \cos \psi \cos \vartheta \mathbf{e}_2 + \sin \vartheta \mathbf{e}_3 \\ \sin \psi \sin \vartheta \mathbf{e}_1 - \cos \psi \sin \vartheta \mathbf{e}_2 + \cos \vartheta \mathbf{e}_3 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (3.19)$$

La terza rotazione, di un angolo φ , detto **angolo di rotazione propria** (sempre in verso positivo antiorario) viene effettuata attorno all'asse di versore \mathbf{e}''_3 , che resta quindi invariato.

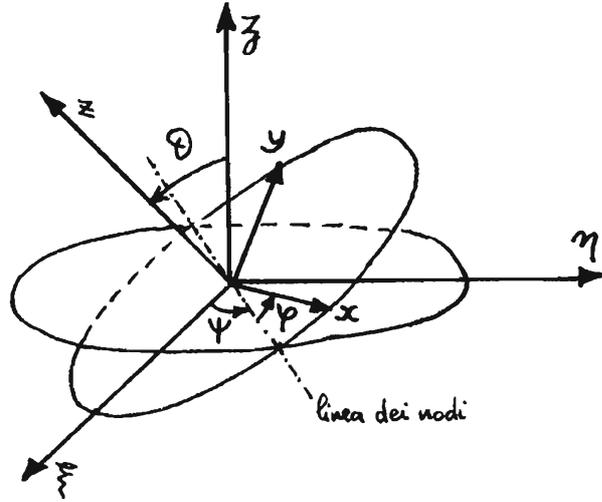


Figura 3.6 Angolo di rotazione propria

Questa rotazione porta la terna Σ'' nella terna solidale S , di versori $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k} \equiv \mathbf{e}_3'')$ che si ottengono dall'applicazione della terza matrice di rotazione \mathbb{A}_φ alla terna dei versori di Σ'' (si veda la Fig. 3.6):

$$\begin{pmatrix} \mathbf{i} \\ \mathbf{j} \\ \mathbf{k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \psi \mathbf{e}_1 + \sin \psi \mathbf{e}_2 \\ -\sin \psi \cos \vartheta \mathbf{e}_1 + \cos \psi \cos \vartheta \mathbf{e}_2 + \sin \vartheta \mathbf{e}_3 \\ \sin \psi \sin \vartheta \mathbf{e}_1 - \cos \psi \sin \vartheta \mathbf{e}_2 + \cos \vartheta \mathbf{e}_3 \end{pmatrix}. \quad (3.20)$$

La trasformazione che lega i versori della terna S a quelli della terna fissa Σ è quindi data dal prodotto delle tre rotazioni:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \mathbf{i} \\ \mathbf{j} \\ \mathbf{k} \end{pmatrix} &= \mathbb{A}_\varphi \mathbb{A}_\vartheta \mathbb{A}_\psi \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}_3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (\cos \psi - \sin \varphi \sin \psi \cos \vartheta) \mathbf{e}_1 + (\cos \varphi \sin \psi + \sin \varphi \cos \psi \cos \vartheta) \mathbf{e}_2 + \sin \varphi \sin \vartheta \mathbf{e}_3 \\ (-\sin \varphi \cos \psi - \cos \varphi \sin \psi \cos \vartheta) \mathbf{e}_1 + (-\sin \varphi \sin \psi + \cos \varphi \cos \psi \cos \vartheta) \mathbf{e}_2 + \cos \varphi \sin \vartheta \mathbf{e}_3 \\ \sin \psi \sin \vartheta \mathbf{e}_1 - \cos \psi \sin \vartheta \mathbf{e}_2 + \cos \vartheta \mathbf{e}_3 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3.21)$$

L'espressione inversa, ovvero la rappresentazione dei versori della terna fissa Σ per mezzo dei versori della terna solidale S , si ottiene dall'applicazione (in ordine inverso) delle trasposte delle matrici di rotazione:

$$(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)^T = (\mathbb{A}_\varphi \mathbb{A}_\vartheta \mathbb{A}_\psi)^T (\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})^T = \mathbb{A}_\psi^T \mathbb{A}_\vartheta^T \mathbb{A}_\varphi^T (\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})^T. \quad (3.22)$$

3.5 Rappresentazione di $\boldsymbol{\omega}$

Dai risultati ottenuti per la composizione dei moti rigidi è immediato ottenere l'espressione della velocità di istantanea rotazione $\boldsymbol{\omega}$ di S rispetto a Σ come somma delle tre successive velocità di rotazione, corrispondenti alle tre trasformazioni che hanno portato Σ a coincidere con S ; ovvero:

$$\boldsymbol{\omega} = \dot{\psi}\mathbf{e}_3 + \dot{\vartheta}\mathbf{N} + \dot{\varphi}\mathbf{k}. \quad (3.23)$$

La (3.23) costituisce una rappresentazione di $\boldsymbol{\omega}$ in una base non ortogonale di versori, dove \mathbf{e}_3 appartiene a Σ e Σ' , \mathbf{k} appartiene a Σ'' e ad S e \mathbf{N} appartiene a Σ' e Σ'' . È particolarmente importante costruire la rappresentazione di $\boldsymbol{\omega}$ nei versori della terna solidale S . Infatti, come vedremo in seguito, le equazioni di Eulero per la dinamica di un sistema rigido (II equazione cardinale)

$$\sigma(O)\dot{\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{\omega} \wedge \sigma(O)\boldsymbol{\omega} = \mathbf{M}_A^{(ext)}(O) + \mathbf{M}_R^{(ext)}(O) \quad (3.24)$$

sono immediatamente rappresentabili per componenti nel riferimento solidale S .

Anticipiamo, rispetto al Capitolo 4, il significato dei simboli: $\sigma(O)$ è la matrice (omografia) di inerzia, nota (e quindi rappresentabile) solo in S , O è un punto fisso rispetto all'osservatore Σ oppure è il centro di massa del sistema rigido, $\mathbf{M}_A^{(ext)}(O)$ e $\mathbf{M}_R^{(ext)}(O)$ rappresentano, rispettivamente, il momento risultante rispetto ad O delle forze attive esterne e delle reazioni vincolari esterne.

Per rappresentare $\boldsymbol{\omega}$ nella terna di versori del riferimento solidale S , occorre dunque trovare la rappresentazione di \mathbf{e}_3 e di \mathbf{N} in $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$. Per ottenere l'espressione di \mathbf{N} basta tornare da S a Σ'' con la matrice di rotazione \mathbb{A}_φ^T :

$$(\mathbf{N} \equiv \mathbf{e}_1'', \mathbf{e}_2'', \mathbf{e}_3'')^T = \mathbb{A}_\varphi^T(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})^T, \quad (3.25)$$

i.e.

$$\begin{pmatrix} \mathbf{N} \equiv \mathbf{e}_1'' \\ \mathbf{e}_2'' \\ \mathbf{e}_3'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{i} \\ \mathbf{j} \\ \mathbf{k} \end{pmatrix}, \quad (3.26)$$

da cui otteniamo

$$\mathbf{N} = \cos \varphi \mathbf{i} - \sin \varphi \mathbf{j}. \quad (3.27)$$

Per ottenere l'espressione di \mathbf{e}_3 , basta tornare con la successiva rotazione inversa \mathbb{A}_ϑ^T alla terna di Σ' , dato che $\mathbf{e}_3 \equiv \mathbf{e}_3'$, cioè:

$$(\mathbf{e}_1' \equiv \mathbf{N}, \mathbf{e}_2', \mathbf{e}_3' \equiv \mathbf{e}_3)^T = \mathbb{A}_\vartheta^T \mathbb{A}_\varphi^T(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})^T. \quad (3.28)$$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{e}_1' \equiv \mathbf{N} \\ \mathbf{e}_2' \\ \mathbf{e}_3' \equiv \mathbf{e}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \vartheta & -\sin \vartheta \\ 0 & \sin \vartheta & \cos \vartheta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \varphi \mathbf{i} - \sin \varphi \mathbf{j} \\ \sin \varphi \mathbf{i} + \cos \varphi \mathbf{j} \\ \mathbf{k} \end{pmatrix} \quad (3.29)$$

da cui si ottiene l'espressione di \mathbf{e}_3 nella terna di versori solidali $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$:

$$\mathbf{e}_3 = \sin \vartheta \sin \varphi \mathbf{i} + \sin \vartheta \cos \varphi \mathbf{j} + \cos \vartheta \mathbf{k} . \quad (3.30)$$

Sostituendo in (3.23) le espressioni trovate in (3.27) e (3.30), otteniamo la rappresentazione della velocità di istantanea rotazione della terna solidale S , rispetto a Σ , espressa per mezzo degli angoli di Eulero (coordinate lagrangiane) e delle loro derivate, nelle componenti del riferimento solidale, riferimento in cui possiamo rappresentare le equazioni di Eulero (3.24):

$$\boldsymbol{\omega} = (\dot{\psi} \sin \vartheta \sin \varphi + \dot{\vartheta} \cos \varphi) \mathbf{i} + (\dot{\psi} \sin \vartheta \cos \varphi - \dot{\vartheta} \sin \varphi) \mathbf{j} + (\dot{\psi} \cos \vartheta + \dot{\varphi}) \mathbf{k} . \quad (3.31)$$

3.6 Composizione di moti rigidi

Consideriamo il moto di un punto P , solidale ad un osservatore identificato da una terna S' con origine nel punto O' , visto da altri due osservatori, generalmente in movimento fra loro e rispetto a S' . Siano Σ , con origine in Ω ed S , con origine in O . Supponiamo che siano note le caratteristiche cinematiche di S' rispetto a S e di S rispetto a Σ , vogliamo scrivere la velocità di P per l'osservatore Σ . Questo significa che l'osservatore S conosce la velocità di O' e la velocità di istantanea rotazione di S' rispetto a se stesso, ovvero $\mathbf{v}(O')|_S$ e $\boldsymbol{\omega}'|_S$ e che l'osservatore Σ conosce la velocità di O e la velocità di istantanea rotazione di S rispetto a se stesso, ovvero $\mathbf{v}(O)|_\Sigma$ e $\boldsymbol{\omega}'|_\Sigma$.

Usando le formule della cinematica relativa avremo:

$$\mathbf{v}(P)|_S = \mathbf{v}(O')|_S + \boldsymbol{\omega}'|_S \wedge (P - O') \quad (3.32)$$

e

$$\begin{aligned} \mathbf{v}(P)|_\Sigma &= \mathbf{v}(P)|_S + \mathbf{v}(O)|_\Sigma + \boldsymbol{\omega}|_\Sigma \wedge (P - O) = \\ &= \mathbf{v}(O')|_S + \boldsymbol{\omega}'|_S \wedge (P - O') + \mathbf{v}(O)|_\Sigma + \boldsymbol{\omega}|_\Sigma \wedge (P - O) . \end{aligned} \quad (3.33)$$

Possiamo scomporre il termine

$$\boldsymbol{\omega}|_\Sigma \wedge (P - O)$$

come

$$\boldsymbol{\omega}|_\Sigma \wedge (P - O) = \boldsymbol{\omega}|_\Sigma \wedge (P - O') + \boldsymbol{\omega}|_\Sigma \wedge (O' - O) .$$

Ma

$$\mathbf{v}(O')|_S + \mathbf{v}(O)|_\Sigma + \boldsymbol{\omega}|_\Sigma \wedge (O' - O)$$

rappresenta la velocità di O' per l'osservatore Σ , quindi la (3.33) si scrive come

$$\mathbf{v}(P)|_{\Sigma} = \mathbf{v}(O')|_{\Sigma} + (\boldsymbol{\omega}'|_S + \boldsymbol{\omega}|_{\Sigma}) \wedge (P - O'). \quad (3.34)$$

La velocità di P in Σ si ottiene quindi sommando alla velocità in Σ dell'origine O' della terna solidale a P il termine di istantanea rotazione come somma dei vettori $\boldsymbol{\omega}|_{\Sigma}$ e $\boldsymbol{\omega}'|_S$, che rappresentano l'istantanea rotazione di S rispetto a Σ e di S' rispetto ad S . Il vettore che rappresenta la rotazione istantanea “assoluta” (cioè per l'osservatore considerato fisso, in questo caso Σ) si ottiene sommando le rotazioni istantanee di ciascun osservatore rispetto al precedente. La dimostrazione è indipendente dal numero di osservatori considerati e quindi vale per un numero qualsiasi di osservatori, ciascuno in moto (ovviamente rigido) rispetto all'altro.

Capitolo 4

Dinamica dei Sistemi Rigidi

4.1 Le equazioni cardinali

Nella parte iniziale di questo capitolo riporteremo in modo estremamente succinto i risultati (noti dal corso di Fisica Generale) che riguardano la Dinamica dei sistemi materiali, utilizzando, per la sua semplicità, il formalismo dei sistemi materiali discreti (ovvero, formati da un numero finito di punti materiali). Nei paragrafi successivi considereremo in modo più dettagliato la forma che le leggi generali della Dinamica assumono nel caso che i sistemi materiali siano corpi rigidi.

Consideriamo un osservatore inerziale, di origine O , ed un sistema \mathfrak{M} , formato da n particelle (punti materiali), identificate dai loro vettori posizione ($P_i - O$) e dalla loro massa m_i , i.e. $\mathfrak{M} := \{P_i, m_i\}$, $i = 1, 2, \dots, n$. Per ciascuno dei punti materiali vale la II Legge di Newton ¹

$$m_i \mathbf{a}_i = \mathbf{F}_i = \mathbf{F}_i^{(ext)} + \mathbf{F}_i^{(int)}, \quad (4.1)$$

dove $\mathbf{F}_i^{(ext)}$ è la risultante delle forze esterne (forze prodotte da sistemi materiali esterni a \mathfrak{M}) e che, generalmente è esprimibile come funzione della posizione e della velocità del punto materiale considerato e, eventualmente, del tempo, $\mathbf{F}_i^{(ext)} = \mathbf{F}_i^{(ext)}(P_i, \mathbf{v}_i, t)$ e $\mathbf{F}_i^{(int)}$ è la risultante delle forze interne, delle forze, cioè, che gli altri punti materiali di \mathfrak{M} esercitano sul punto considerato (forze di interazione fra i punti di \mathfrak{M}), $\mathbf{F}_i^{(int)} = \sum_{j=1, j \neq i}^n \mathbf{F}_{ij}^{(int)}$.

In generale avremo quindi che $\mathbf{F}_i^{(int)} = \mathbf{F}_i^{(int)}(\mathcal{C}, \mathcal{V}, t)$, dove $\mathcal{C} := \{P_1, P_2, \dots, P_n\}$ è detta **configurazione** del sistema \mathfrak{M} e $\mathcal{V} := \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$ è detto **atto di moto** del sistema \mathfrak{M} .

¹Sir Isaac Newton, matematico, fisico, filosofo naturale, astronomo, teologo ed alchimista inglese (Woolsthorpe-by-Colsterworth, 25 dicembre 1642 - Londra, 20 marzo 1727).

Naturalmente la III Legge di Newton impone che, qualunque sia la dipendenza di $\mathbf{F}_{ij}^{(int)}$ dalla posizione dei punti, dalle loro velocità e dal tempo, deve valere:

$$\mathbf{F}_{ij}^{(int)} = -\mathbf{F}_{ji}^{(int)} ,$$

il che implica

$$\mathbf{F}_{ij}^{(int)} = g(t)\mathbf{f}_{ij}^{(int)} ((P_i - P_j), (\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_j))$$

con la dipendenza esplicita dal tempo espressa da una funzione scalare $g(t)$, fattorizzata rispetto alla parte vettoriale \mathbf{f} , che deve dipendere da posizione e velocità delle coppie di punti solo in termini delle loro differenze.

Teorema del moto del centro di massa 4.1.1 *Ricordiamo la definizione di centro di massa di un sistema materiale \mathfrak{M} e le sue conseguenze cinematiche. Si definisce P_0 , centro di massa di \mathfrak{M} , il punto che soddisfa l'uguaglianza*

$$M(P_0 - O) = \sum_{i=1}^n m_i(P_i - O) . \quad (4.2)$$

La (4.2) porta immediate conseguenze sul piano cinematico. Infatti, derivandone entrambi i membri, si ottiene

$$M\mathbf{v}_{P_0} = \sum_{i=1}^n m_i\mathbf{v}_i := \mathbf{Q} , \quad (4.3)$$

dove \mathbf{Q} è per definizione la quantità di moto del sistema materiale \mathfrak{M} . Derivando ulteriormente rispetto al tempo avremo la relazione fra le accelerazioni dei punti di \mathfrak{M} e quella del centro di massa:

$$M\mathbf{a}_{P_0} = \sum_{i=1}^n m_i\mathbf{a}_i := \dot{\mathbf{Q}} . \quad (4.4)$$

I Equazione Cardinale 4.1.2 *Consideriamo le (4.1) e sommiamole su tutti i punti del sistema \mathfrak{M} :*

$$\sum_{i=1}^n m_i\mathbf{a}_i = \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i^{(ext)} + \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i^{(int)} .$$

La III Legge di Newton impone che $\sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i^{(int)} = \mathbf{0}$. Posto $\sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i^{(ext)} = \mathbf{F}^{(ext)}$ ed utilizzando (4.4), la I Equazione Cardinale si scrive come

$$\dot{\mathbf{Q}} = M\mathbf{a}_{P_0} = \mathbf{F}^{(ext)} , \quad (4.5)$$

dove, in generale, $\mathbf{F}^{(ext)} = \mathbf{F}^{(ext)}(\mathcal{C}, \mathcal{V}, t)$, il che significa che la risultante delle forze esterne può dipendere dalla configurazione e dall'atto di moto, oltre che dal tempo, di tutti i punti del sistema. Se questa dipendenza si riduce ad una dipendenza dalla sola posizione e velocità del centro di massa (ad esempio il caso di sistemi materiali soggetti alla sola forza peso), la I Equazione Cardinale può essere vista (e risolta) come l'equazione di moto del suo centro di massa P_0 . Si osservi che il moto di questo punto rappresentativo dell'intero sistema \mathfrak{M} riguarda solo la parte traslazionale del moto.

Prima di ricavare la II Equazione Cardinale ricordiamo la definizione di momento angolare (o momento della quantità di moto) $\mathbf{K}(O)$ di un sistema materiale:

$$\mathbf{K}(O) := \sum_{i=1}^n (P_i - O) \wedge m_i \mathbf{v}_i . \quad (4.6)$$

da cui segue

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{K}}(O) &= \sum_{i=1}^n (P_i - O) \wedge m_i \mathbf{a}_i + \sum_{i=1}^n (\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_O) \wedge m_i \mathbf{v}_i = \\ &= \sum_{i=1}^n (P_i - O) \wedge m_i \mathbf{a}_i - \mathbf{v}_O \wedge \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{v}_i = \sum_{i=1}^n (P_i - O) \wedge m_i \mathbf{a}_i - \mathbf{v}_O \wedge \mathbf{Q} , \end{aligned} \quad (4.7)$$

quindi vale l'uguaglianza

$$\sum_{i=1}^n (P_i - O) \wedge m_i \mathbf{a}_i = \dot{\mathbf{K}}(O) + \mathbf{v}_O \wedge \mathbf{Q} . \quad (4.8)$$

dove l'ultimo termine del membro di destra della (4.8) può essere reso nullo da un'opportuna scelta del polo di riduzione O , ovvero:

- O è un punto fisso nel sistema di riferimento;
- $O \equiv P_0$, ovvero O coincide con il centro di massa del sistema \mathfrak{M} ;
- $\mathbf{v}_O \wedge \mathbf{v}_{P_0} = 0$, cioè il vettore velocità di O è parallelo alla velocità del centro di massa P_0 e quindi alla quantità di moto \mathbf{Q} .

Formula di trasposizione dei momenti.

Ricordiamo la formula di trasposizione dei momenti, formula che vale per un qualunque sistema di n vettori v_i applicati ai punti P_i . Il momento risultante, rispetto ad un polo qualunque O , si definisce come

$$\mathfrak{M}(O) := \sum_{i=1}^n (P_i - O) \wedge v_i .$$

Se si calcola il momento risultante rispetto ad un polo diverso O' , avremo

$$\mathfrak{M}(O') := \sum_{i=1}^n (P_i - O') \wedge v_i = \sum_{i=1}^n (P_i - O + O - O') \wedge v_i = \mathfrak{M}(O) + (O - O') \wedge \mathfrak{R},$$

dove $\mathfrak{R} = \sum_{i=1}^n v_i$ è il vettore risultante del sistema di vettori v_i .

Nel caso di cambiamento del polo per il calcolo del momento angolare, dalla (4.6) avremo quindi

$$\mathbf{K}(O') = \mathbf{K}(O) + (O - O') \wedge \mathbf{Q}.$$

Questa formula ha particolare importanza nel calcolo del momento angolare di un sistema articolato, composto da più parti rigide. Infatti, permette di passare facilmente dai momenti calcolati per ciascuna parte rispetto al proprio centro di massa al momento angolare totale calcolato rispetto ad un unico polo.

II Equazione Cardinale 4.1.3 *Consideriamo le (4.1) e moltiplichiamo vettorialmente a sinistra ciascuna di esse per il vettore posizione che individua il punto P_i rispetto ad un polo O e sommiamole su tutti i punti del sistema \mathfrak{M} :*

$$\sum_{i=1}^n (P_i - O) \wedge m_i \mathbf{a}_i = \sum_{i=1}^n (P_i - O) \wedge \mathbf{F}_i = \sum_{i=1}^n (P_i - O) \wedge \mathbf{F}_i^{(ext)} + \sum_{i=1}^n (P_i - O) \wedge \mathbf{F}_i^{(int)}.$$

La III Legge di Newton impone alle forze interne (di interazione) di costituire un sistema equilibrato, ovvero un sistema di coppie di vettori di braccio nullo. Quindi anche il loro momento risultante è nullo e la II Equazione Cardinale prende la forma

$$\dot{\mathbf{K}}(O) + \mathbf{v}_O \wedge \mathbf{Q} = \mathbf{M}^{(ext)}(O)$$

dove $\mathbf{M}^{(ext)}(O) := \sum_{i=1}^n (P_i - O) \wedge \mathbf{F}_i^{(ext)}$ è il momento risultante delle forze esterne. Cercando un polo O che soddisfi le condizioni sopra esposte, avremo la forma semplificata della II Equazione Cardinale, forma che utilizzeremo sempre, salvo diverso avviso:

$$\dot{\mathbf{K}}(O) = \mathbf{M}^{(ext)}(O). \quad (4.9)$$

Complessivamente le Equazioni Cardinali forniscono 6 equazioni scalari per sistemi materiali che si muovono in \mathbb{R}^3 , 3 equazioni scalari per sistemi che si muovono in \mathbb{R}^2 . Sono quindi equazioni che devono essere necessariamente soddisfatte da un qualunque sistema materiale (in ambito meccanico classico),

ma in generale non sono sufficienti per la determinazione del moto. Il caso particolarmente interessante è quello dei sistemi rigidi.

Sistemi vincolati.

Supponiamo che il sistema materiale considerato sia soggetto a dei vincoli che ne limitano le possibili configurazioni e movimenti. Rimandando al prossimo capitolo la trattazione matematica dei vincoli, qui ci limitiamo a trattare le conseguenze della presenza dei vincoli dal punto di vista dinamico. L'idea "newtoniana" è che i vincoli limitano configurazione ed atto di moto di un sistema materiale esercitando un'azione dinamica (ovvero una forza e/o un momento di forza), che è, però, a priori incognita, la cosiddetta **reazione o momento di reazione vincolare**. Indicando con i simboli Φ e $\mathbf{M}_\Phi(O)$ la forza di reazione vincolare ed il momento di reazione rispetto ad un polo O , la (4.1) può essere scritta come

$$m_i \mathbf{a}_i = \mathbf{F}_i = \mathbf{F}_i^{(act)} + \Phi_i, \quad (4.10)$$

dove $\mathbf{F}_i^{(act)}$ è la risultante delle cosiddette **forze attive** o **forze direttamente applicate** o, ancora, **forze note** agenti sul punto i -esimo. Si tratta delle forze di cui abbiamo una rappresentazione matematica nota nei termini di posizione e velocità del punto considerato e, eventualmente, del tempo (ad esempio il peso, le forze elastiche, le forze di resistenza viscosa, etc..). Φ_i rappresenta la risultante delle reazioni vincolari incognite agenti sul punto i -esimo. Ovviamente ciascuno dei due termini può essere ulteriormente scomposto considerando se l'azione dinamica proviene dall'esterno o dall'interno del sistema considerato:

$$\mathbf{F}_{i,(act)} = \mathbf{F}_{i,(act)}^{(ext)} + \mathbf{F}_{i,(act)}^{(int)}, \quad \Phi_i = \Phi_i^{(ext)} + \Phi_i^{(int)}.$$

La conseguenza sulle Equazioni Cardinali per sistemi materiali vincolati è che risultante e momento risultante delle forze esterne sono scomponibili nel contributo dovuto alle forze attive (noto) ed in quello dovuto alle reazioni vincolari (incognito):

$$\dot{\mathbf{Q}} = M \mathbf{a}_{P_0} = \mathbf{F}_{(act)}^{(ext)} + \Phi^{(ext)}, \quad \dot{\mathbf{K}}(O) = \mathbf{M}_{(act)}^{(ext)}(O) + \mathbf{M}_\Phi^{(ext)}(O), \quad (4.11)$$

dove

$$\mathbf{F}_{(act)}^{(ext)} = \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_{i,(act)}^{(ext)}, \quad \Phi^{(ext)} = \sum_{i=1}^n \Phi_i^{(ext)},$$

$$\mathbf{M}_{(act)}^{(ext)}(O) = \sum_{i=1}^n (P_i - O) \wedge \mathbf{F}_{i,(act)}^{(ext)}, \quad \mathbf{M}_\Phi^{(ext)}(O) = \sum_{i=1}^n (P_i - O) \wedge \Phi_i^{(ext)}.$$

4.2 Le equazioni cardinali della Dinamica per Sistemi Rigidi

La I Equazione Cardinale (4.5) riguarda il moto del centro di massa del sistema e non si caratterizza in modo particolare quando il sistema considerato è un sistema rigido. Diversa è la questione per la II Equazione Cardinale. Se riprendiamo la definizione di momento angolare (4.6), possiamo introdurre l'ipotesi che il sistema materiale sia rigido per mezzo della formula fondamentale della Cinematica dei Rigidi (3.2), con l'avvertenza di scegliere come polo O per il calcolo dei momenti un punto che "partecipi" al moto rigido. Le scelte possibili per poter scrivere nel caso di sistemi rigidi la versione più semplice (4.9) sono essenzialmente due: il centro di massa del sistema, oppure, se siamo nel caso di un moto di precessione, il polo stesso della precessione. Riprendiamo dunque la definizione di momento angolare (4.6) e consideriamo il caso in cui **il polo O sia un punto che partecipa al moto rigido**. Per la velocità degli altri punti del sistema vale quindi la formula fondamentale della cinematica dei sistemi rigidi (3.2) ed il momento angolare si scrive come

$$\mathbf{K}(O) = \sum_{i=1}^n m_i (P_i - O) \wedge \mathbf{v}(O) + \sum_{i=1}^n m_i (P_i - O) \wedge [(\boldsymbol{\omega} \wedge (P_i - O))] . \quad (4.12)$$

Il primo termine a destra del segno di uguaglianza è facilmente calcolabile:

$$\sum_{i=1}^n m_i (P_i - O) \wedge \mathbf{v}(O) = M (P_0 - O) \wedge \mathbf{v}(O) ,$$

dove $M = \sum_{i=1}^n m_i$ è la massa totale del sistema e P_0 il suo centro di massa. È evidente che questo termine può essere reso nullo da un'opportuna scelta di O , per esempio $O \equiv P_0$, oppure scegliendo un qualunque punto che abbia velocità nulla nel moto rigido, come il polo in un moto di precessione o un punto dell'asse, nel caso di rotazioni attorno ad un asse fisso. Calcoliamo adesso il secondo termine nella seconda riga di (4.12). Il risultato può, ovviamente, essere ottenuto calcolando direttamente il doppio prodotto vettoriale, oppure ricordandone la proprietà per cui, dati tre vettori $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$, vale

$$\mathbf{a} \wedge (\mathbf{b} \wedge \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c} .$$

Applicando tale formula nel caso di interesse, avremo

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n m_i (P_i - O) \wedge [\boldsymbol{\omega} \wedge (P_i - O)] = \\ \sum_{i=1}^n m_i [(P_i - O)^2 \boldsymbol{\omega} - ((P_i - O) \cdot \boldsymbol{\omega})(P_i - O)] . \end{aligned} \quad (4.13)$$

4.2. LE EQUAZIONI CARDINALI DELLA DINAMICA PER SISTEMI RIGIDI 151

Rappresentando i vettori in (4.13) con coordinate cartesiane nel riferimento solidale S , scelto con origine in O e versori $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$, abbiamo che

$$\sum_{i=1}^n m_i (P_i - O)^2 \boldsymbol{\omega} = \sum_{i=1}^n m_i (x_i^2 + y_i^2 + z_i^2) \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix} \quad (4.14)$$

dove $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ sono le componenti del vettore $\boldsymbol{\omega}$ lungo le direzioni $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ del riferimento solidale S .

Per il secondo termine in (4.13) avremo

$$\sum_{i=1}^n m_i ((P_i - O) \cdot \boldsymbol{\omega}) (P_i - O) = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n m_i (x_i^2 \omega_x + x_i y_i \omega_y + x_i z_i \omega_z) \\ \sum_{i=1}^n m_i (x_i y_i \omega_x + y_i^2 \omega_y + y_i z_i \omega_z) \\ \sum_{i=1}^n m_i (x_i z_i \omega_x + y_i z_i \omega_y + z_i^2 \omega_z) \end{pmatrix} \quad (4.15)$$

e, sottraendo (4.15) da (4.14), otteniamo

$$\begin{pmatrix} \left(\sum_{i=1}^n m_i (y_i^2 + z_i^2) \right) \omega_x + \left(- \sum_{i=1}^n m_i x_i y_i \right) \omega_y + \left(- \sum_{i=1}^n m_i x_i z_i \right) \omega_z \\ \left(- \sum_{i=1}^n m_i x_i y_i \right) \omega_x + \left(\sum_{i=1}^n m_i (x_i^2 + z_i^2) \right) \omega_y + \left(- \sum_{i=1}^n m_i y_i z_i \right) \omega_z \\ \left(- \sum_{i=1}^n m_i x_i z_i \right) \omega_x + \left(- \sum_{i=1}^n m_i y_i z_i \right) \omega_y + \left(\sum_{i=1}^n m_i (x_i^2 + y_i^2) \right) \omega_z \end{pmatrix}. \quad (4.16)$$

I termini racchiusi in parentesi nella (4.16) rappresentano momenti del secondo ordine per la distribuzione delle masse del sistema rigido \mathfrak{M} . In particolare

i termini

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^n m_i (y_i^2 + z_i^2) &:= I_{xx}, \\ \sum_{i=1}^n m_i (x_i^2 + z_i^2) &:= I_{yy}, \\ \sum_{i=1}^n m_i (x_i^2 + y_i^2) &:= I_{zz}\end{aligned}\tag{4.17}$$

si riconoscono come i momenti di inerzia del sistema \mathfrak{M} rispetto ai tre assi coordinati, rispettivamente x, y, z , del riferimento euclideo di origine in O , scelto dall'osservatore solidale S .

Gli altri termini, che definiremo

$$\begin{aligned}-\sum_{i=1}^n m_i x_i y_i &:= I_{xy}, \\ -\sum_{i=1}^n m_i x_i z_i &:= I_{xz}, \\ -\sum_{i=1}^n m_i y_i z_i &:= I_{yz}\end{aligned}\tag{4.18}$$

rappresentano i cosiddetti **momenti centrifughi (o deviatori)** del sistema materiale \mathfrak{M} rispetto alle coppie di piani coordinati.

Il momento angolare di un sistema rigido, per la parte che contiene il termine velocità di istantanea rotazione $\boldsymbol{\omega}$, (si veda la (4.16)), la cui rappresentazione nel riferimento scelto dall'osservatore solidale S è data da (4.15), si può scrivere come

$$\mathbf{K}(O) = \sigma(O)\boldsymbol{\omega},\tag{4.19}$$

dove

$$\sigma(O) := \begin{pmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{xy} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{xz} & I_{yz} & I_{zz} \end{pmatrix}\tag{4.20}$$

è la cosiddetta **matrice (nota anche come tensore o omografia) di inerzia** del sistema rigido \mathfrak{M} rispetto al punto O , le cui proprietà fondamentali discuteremo in seguito.

Possiamo scrivere adesso la forma della II Equazione Cardinale (4.9) nel caso dei sistemi rigidi. Poiché l'equazione va scritta per l'osservatore "fisso" Σ , mentre $\sigma(O)$ è rappresentabile solo dall'osservatore solidale S , ricorriamo alla formula di Poisson (2.32), che lega fra loro le derivate temporali di una grandezza vettoriale, fatte da due osservatori diversi. In questo caso:

$$\frac{d}{dt} \mathbf{K}(O)|_{\Sigma} = \frac{d}{dt} \mathbf{K}(O)|_S + \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{K}(O) \implies \frac{d}{dt} \mathbf{K}(O)|_{\Sigma} = \sigma(O)\dot{\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{\omega} \wedge \sigma(O)\boldsymbol{\omega}, \quad (4.21)$$

poiché per la (2.32)

$$\dot{\boldsymbol{\omega}} := \frac{d}{dt} \boldsymbol{\omega}|_{\Sigma} \equiv \frac{d}{dt} \boldsymbol{\omega}|_S,$$

ovvero, la derivata temporale di $\boldsymbol{\omega}$ è la stessa fra due osservatori. La forma vettoriale della II Equazione Cardinale per i sistemi rigidi è dunque la seguente:

$$\sigma(O)\dot{\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{\omega} \wedge \sigma(O)\boldsymbol{\omega} = \mathbf{M}^{(ext)}(O). \quad (4.22)$$

È interessante notare che il termine a sinistra del segno di uguaglianza in (4.22) va rappresentato nel riferimento solidale S , dove è nota la distribuzione spaziale delle masse e, di conseguenza, l'incognita cinematica $\boldsymbol{\omega}$ va rappresentata nello stesso riferimento. Il termine a destra, al contrario, va spesso rappresentato come un vettore in Σ : il passaggio ad una rappresentazione comune va fatto per mezzo delle matrici di rotazione.

Va osservato anche che la (4.22) si presenta come un'equazione differenziale ordinaria del I ordine nell'incognita vettoriale $\boldsymbol{\omega}$ (corrisponde quindi, in generale, a tre equazioni differenziali scalari ordinarie del I ordine). Per risolvere completamente il problema del moto del sistema rigido \mathfrak{M} occorre esprimere la velocità di istantanea rotazione $\boldsymbol{\omega}$ nelle incognite di configurazione scelte (per esempio gli angoli di Eulero; si veda (3.31)). La II Equazione Cardinale si rappresenta così come equazione (vettoriale) differenziale del II ordine nelle incognite di configurazione. Vedremo in un paragrafo successivo un'applicazione della (4.22) al caso delle precessioni per inerzia (equazioni di Eulero). Naturalmente, se il sistema rigido è vincolato esternamente, il secondo membro della (4.22) si può scomporre nel contributo dovuto alle forze attive ed in quello delle reazioni vincolari:

$$\sigma(O)\dot{\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{\omega} \wedge \sigma(O)\boldsymbol{\omega} = \mathbf{M}_{(act)}^{(ext)}(O) + \mathbf{M}_{\Phi}^{(ext)}(O). \quad (4.23)$$

4.3 I Teoremi dell'Energia

Ricordiamo la definizione di energia cinetica di un sistema materiale:

$$T := \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i v_i^2. \quad (4.24)$$

Facendo riferimento alla formula della velocità relativa a due diversi osservatori Σ e Σ' (si veda (2.47)), avremo, nel caso di un sistema di punti materiali

$$\mathbf{v}_{i,\Sigma} = \mathbf{v}_{O,\Sigma} + \boldsymbol{\omega}' \wedge (P_i - O) + \mathbf{v}_{i,\Sigma'} , \quad (4.25)$$

dove $\boldsymbol{\omega}'$ è il vettore velocità di istantanea rotazione di Σ' rispetto a Σ . La formula di passaggio dell'energia cinetica di un sistema fra due osservatori qualunque si ottiene dunque introducendo la (4.25) in (4.24). Una semplificazione della formula risultante, si ottiene scegliendo un osservatore Σ' in moto traslatorio rispetto a Σ . Questo implica $\boldsymbol{\omega}' = 0$, quindi:

$$\begin{aligned} T_\Sigma &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i (\mathbf{v}_{O,\Sigma} + \mathbf{v}_{i,\Sigma'})^2 \\ &= \frac{1}{2} M \mathbf{v}_{O,\Sigma}^2 + T_{\Sigma'} + \mathbf{v}_{O,\Sigma} \cdot \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{v}_{i,\Sigma'} , \end{aligned}$$

dove

$$T_{\Sigma'} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{v}_{i,\Sigma'}^2$$

è l'energia cinetica osservata da Σ' . Un'ulteriore semplificazione si ottiene scegliendo per origine dell'osservatore Σ' il centro di massa P_0 del sistema materiale osservato. In questo caso il termine $\sum_{i=1}^n m_i \mathbf{v}_{i,\Sigma'}$, che rappresenta la quantità di moto del sistema materiale relativa a Σ' , è nullo, perché la velocità di P_0 in Σ' è nulla. Il risultato così ottenuto è quello del **Teorema di König**² per l'energia cinetica:

Teorema di König 4.3.1 *L'energia cinetica di un sistema materiale, rispetto ad un qualunque osservatore Σ , si può esprimere come somma dell'energia cinetica del centro di massa P_0 , dotato della massa totale M del sistema, e dell'energia cinetica osservata da un sistema Σ' , avente origine nel centro di massa P_0 e che si muove di moto traslatorio rispetto a Σ :*

$$T_\Sigma = \frac{1}{2} M \mathbf{v}_{P_0,\Sigma}^2 + T_{\Sigma'} ,$$

dove il termine $\frac{1}{2} M \mathbf{v}_{P_0,\Sigma}^2$ è l'energia cinetica traslazionale e $T_{\Sigma'}$ è l'energia cinetica relativa ad un osservatore che ha origine nel centro di massa e si muove di moto traslatorio rispetto a Σ . ■

Consideriamo adesso il caso di un sistema materiale rigido \mathfrak{M} . Si tratta semplicemente di specificare la velocità di un punto P_i del sistema rigido

²Johann Samuel König, matematico tedesco (Büdingen, 31 luglio 1712 - Zuilenstein, 21 agosto 1757).

rispetto all'osservatore Σ' . Dalla formula fondamentale della cinematica dei sistemi rigidi (3.2) si ottiene immediatamente che

$$\mathbf{v}_{i,\Sigma'} = \boldsymbol{\omega} \wedge (P_i - P_0)$$

perché Σ' ha origine in P_0 e, quindi $\mathbf{v}_{P_0,\Sigma'} = \vec{0}$. L'energia cinetica del sistema rigido, valutata da Σ' risulta quindi:

$$T_{\Sigma'} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i [\boldsymbol{\omega} \wedge (P_i - P_0)]^2 .$$

Da calcoli analoghi a quelli svolti da (4.13) a (4.20) si ottiene l'espressione del Teorema di König per sistemi rigidi:

$$T = \frac{1}{2} M \mathbf{v}_{P_0}^2 + \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \cdot \sigma(P_0) \boldsymbol{\omega} \quad (4.26)$$

dove T è l'energia cinetica valutata da un qualunque osservatore del moto rigido, $\boldsymbol{\omega}$ è la velocità di istantanea rotazione di una terna con origine nel centro di massa e solidale al rigido stesso e $\sigma(P_0)$ è la matrice di inerzia calcolata rispetto alla terna solidale stessa.

Consideriamo adesso l'estensione a sistemi materiali del **Teorema dell'Energia Cinetica** o **Teorema delle Forze Vive**. Per ciascun punto materiale P_i appartenente ad un sistema vale la (4.1). Moltiplichiamo scalarmente ambo i membri per \mathbf{v}_i e sommiamo le equazioni di tutti i punti del sistema:

$$\sum_{i=1}^n m_i \mathbf{a}_i \cdot \mathbf{v}_i = \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i \cdot \mathbf{v}_i . \quad (4.27)$$

Nel primo membro della (4.27) si riconosce facilmente la derivata temporale dell'energia cinetica totale del sistema

$$\sum_{i=1}^n m_i \mathbf{a}_i \cdot \mathbf{v}_i = \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} m_i \mathbf{v}_i^2 = \frac{d}{dt} T . \quad (4.28)$$

Per quanto riguarda il trattamento del secondo membro, possiamo distinguere le forze agenti sul punto i -esimo in due modi diversi. Se il sistema è libero (ovvero non soggetto a vincoli), l'unica distinzione possibile è quella fra forze che agiscono su P_i dall'esterno del sistema e forze di interazione con altri punti del sistema (forze interne).

Forze esterne e forze interne.

Poiché, per definizione

$$W_i := \mathbf{F}_i \cdot \mathbf{v}_i$$

è la potenza della risultante delle forze agenti su P_i , il secondo membro della (4.27) rappresenta la potenza totale W delle forze agenti sul sistema. Il Teorema dell'energia cinetica (nella forma differenziale) può dunque essere rappresentato nella forma

$$\frac{d}{dt}T = W = W^{(ext)} + W^{(int)}, \quad (4.29)$$

ovvero, che **la derivata temporale dell'energia cinetica uguaglia la potenza totale delle forze agenti sul sistema**, in questo caso suddivise fra forze esterne e forze interne. Ricordando la definizione di **lavoro** come integrale nel tempo della potenza:

$$L_{[t_0, t]} := \int_{t_0}^t W(\tau) d\tau,$$

possiamo enunciare la versione integrale del Teorema dell'Energia Cinetica:

Teorema dell'Energia Cinetica 4.3.2 *La variazione dell'energia cinetica di un sistema fra l'istante iniziale considerato, t_0 , ed un istante generico t uguaglia il lavoro totale fatto dalle forze agenti sul sistema*

$$\Delta T := T - T_0 = L_{[t_0, t]}. \quad (4.30)$$

■

Per capire quando sia possibile integrare effettivamente la potenza W per ottenere l'espressione del lavoro in funzione del tempo o, in subordine, delle incognite di configurazione del sistema, esaminiamo in dettaglio la dipendenza funzionale della risultante delle forze agenti sul punto i -esimo. Siano $\{P_i, \mathbf{v}_i\}$ la posizione e la velocità del punto i -esimo e, rispettivamente, $\mathcal{C} := \{P_1, P_2, \dots, P_n\}$ la **configurazione** e $\mathcal{V} := \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$ l'**atto di moto** del sistema. Avremo, in generale

$$\mathbf{F}_i^{(ext)} = \mathbf{F}_i^{(ext)}(P_i(t), \mathbf{v}_i(t), t), \quad \mathbf{F}_i^{(int)} = \mathbf{F}_i^{(int)}(\mathcal{C}(t), \mathcal{V}(t), t).$$

Le forze esterne che agiscono sul punto P_i sono infatti forze prodotte dall'esterno del sistema materiale considerato e la reazione (in termini del III Principio della Dinamica) di ciascun punto P_i è sul sistema materiale esterno che produce tali forze è trascurabile: lo stato (nel senso della configurazione e dello stato cinematico) dell'agente esterno non è influenzato dallo stato e

dal moto del sistema considerato. Pertanto, per ciascun punto del sistema, la risultante delle forze esterne agenti su di esso dipende al più dalla posizione e dalla velocità (ed eventualmente dal tempo in modo esplicito) del punto stesso. La risultante delle forze agenti sul punto P_i , che sono di interazione con gli altri punti del sistema (forze interne), dipende invece, in generale, dalla posizione e dalla velocità di tutti i punti del sistema (ed eventualmente dal tempo in modo esplicito). Le forze di interazione devono comunque rispettare il III Principio della Dinamica, costituendo quindi un sistema di forze **equilibrato**, un sistema cioè a risultante e momento risultante nullo. Quindi (per il **Principio di sovrapposizione**) la risultante delle forze interne agenti sul punto i -esimo è la somma delle forze di interazione di coppia fra il punto P_i e tutti gli altri punti del sistema:

$$\mathbf{F}_i^{(int)} = \mathbf{F}_i^{(int)}(\mathcal{C}(t), \mathcal{V}(t), t) = \sum_{j=1, j \neq i}^n \mathbf{F}_{ij}^{(int)}(P_i, P_j, \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j, t).$$

Vediamo adesso cosa si può dire sull'integrale del lavoro. Per quanto riguarda l'espressione della potenza avremo:

$$W_i^{ext} = \mathbf{F}_i^{(ext)}(P_i(t), \mathbf{v}_i(t), t) \cdot \mathbf{v}_i(t) \implies W^{ext} = \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i^{(ext)}(P_i(t), \mathbf{v}_i(t), t) \cdot \mathbf{v}_i(t); \quad (4.31)$$

di conseguenza il lavoro svolto dalle forze esterne risulta

$$L_{[t_0, t]}^{(ext)} = \int_{t_0}^t \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i^{(ext)}(P_i(\tau), \mathbf{v}_i(\tau), \tau) \cdot \mathbf{v}_i(\tau) d\tau = \sum_{i=1}^n \int_{t_0}^t \mathbf{F}_i^{(ext)}(P_i(\tau), \mathbf{v}_i(\tau), \tau) \cdot \mathbf{v}_i(\tau) d\tau, \quad (4.32)$$

dove lo scambio fra somma ed integrale è lecito poiché la somma riguarda un numero finito di addendi. Il lavoro risulta quindi una ben definita funzione composta del tempo, attraverso la dipendenza dal tempo di posizione e velocità di ciascun punto del sistema. Tuttavia questa dipendenza risulta nota solo conoscendo il moto di ciascun punto del sistema e quindi il lavoro, in generale, non è calcolabile e la (4.30) non è di aiuto per risolvere il problema del moto del sistema considerato. Piuttosto, se siamo in grado di misurare (o almeno stimare) la variazione dell'energia cinetica, questo ci permette di costruire un'ipotesi sulle forze agenti sul sistema e sulla loro rappresentazione matematica. Ci sono però dei casi in cui l'integrale del lavoro è calcolabile senza una conoscenza completa del moto del sistema. Questo avviene se le forze esterne sono esclusivamente **posizionali**, cioè

$$\mathbf{F}_i^{(ext)} = \mathbf{F}_i^{(ext)}(P_i(t)).$$

In questo caso l'integrale del lavoro diviene

$$L_{[t_0, t]}^{(ext)} = \sum_{i=1}^n \int_{t_0}^t \mathbf{F}_i^{(ext)}(P_i(\tau)) \cdot \mathbf{v}_i(\tau) d\tau.$$

È possibile quindi effettuare un cambiamento di variabile di integrazione usando l'uguaglianza $dP_i = \mathbf{v}_i dt$ e trasformando l'integrale definito (nel tempo) in un integrale di linea:

$$\int_{t_0}^t \mathbf{F}_i^{(ext)}(P_i(\tau)) \cdot \mathbf{v}_i(\tau) d\tau = \int_{\gamma(P_{i0}, P_i)} \mathbf{F}_i^{(ext)}(P_i) \cdot dP_i, \quad (4.33)$$

dove $\gamma(P_{i0}, P_i)$ è la curva (traiettoria) percorsa dal punto materiale P_i dall'istante iniziale t_0 all'istante generico t : $P_{i0} = P_i(t_0)$, $P_i = P_i(t)$. Nel caso di sistemi vincolati in modo che le traiettorie percorse siano note (si pensi ad esempio al pendolo fisico), l'integrale del lavoro può essere calcolato anche senza conoscere la legge oraria dei punti P_i del sistema. Il caso decisamente più importante è tuttavia quello delle cosiddette **forze conservative**. Condizione sufficiente per questo è che

$$\mathbf{F}_i^{(ext)}(P_i) = \nabla V^{(ext)}(P_i), \quad (4.34)$$

in un dominio $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ semplicemente connesso e dove

$$\nabla V^{(ext)}(P_i) := \nabla_i V_i^{(ext)}.$$

L'operatore $\nabla_i := (\frac{\partial}{\partial x_i} \mathbf{i}, \frac{\partial}{\partial y_i} \mathbf{j}, \frac{\partial}{\partial z_i} \mathbf{k})$ rappresenta il gradiente rispetto alle coordinate di P_i e $V_i^{(ext)}$ la funzione potenziale costruita a partire dalla risultante delle forze esterne agenti su P_i . L'integrale del lavoro risulta così:

$$\begin{aligned} L_{[t_0, t]}^{(ext)} &= \sum_{i=1}^n \int_{\gamma(P_{i0}, P_i)} \nabla_i V_i^{(ext)} \cdot dP_i = \sum_{i=1}^n \int_{\gamma(P_{i0}, P_i)} dV_i^{(ext)} \\ &= \sum_{i=1}^n \left(V_i^{(ext)}(P_i) - V_i^{(ext)}(P_{i0}) \right), \end{aligned} \quad (4.35)$$

poiché $\nabla_i V_i^{(ext)} \cdot dP_i = dV_i^{(ext)}$ è un differenziale esatto. Possiamo quindi costruire un potenziale totale delle forze esterne (conservative) semplicemente come somma dei singoli potenziali ottenuti da ciascuna delle risultanti agenti sui singoli punti:

$$V^{(ext)} = V^{(ext)}(\mathcal{C}) = \sum_{i=1}^n \left(V_i^{(ext)}(P_i) \right). \quad (4.36)$$

La risultante sul punto i -esimo è ricavabile dal potenziale totale prendendone il gradiente rispetto alle sue coordinate e quindi la (4.34) può essere riscritta come

$$\mathbf{F}_i^{(ext)} = \nabla_i V^{(ext)},$$

dato che $\nabla_i V^{(ext)} \equiv \nabla_i V_i^{(ext)}$, poiché per ogni altro indice $j \neq i$ il gradiente rispetto alle coordinate del punto P_i risulta nullo.

Occupiamoci adesso delle forze interne. Abbiamo già sottolineato che esse si caratterizzano come interazione fra le coppie dei punti del sistema e che, per soddisfare il III Principio, devono costituire delle coppie di braccio nullo. Pertanto la forza \mathbf{F}_{ij} esercitata sul punto P_i dal punto P_j , deve corrispondere la forza $\mathbf{F}_{ji} = -\mathbf{F}_{ij}$ esercitata dal punto P_i sul punto P_j . Posto $\mathbf{r}_{ij} := (P_i - P_j)$, la forza di interazione \mathbf{F}_{ij} è necessariamente della forma

$$\mathbf{F}_{ij} = f_{ij} \hat{\mathbf{r}}_{ij},$$

dove $f_{ij} = f_{ji}$ è una quantità scalare e $\hat{\mathbf{r}}_{ij} := \text{vers}(P_i - P_j)$ è il versore di $(P_i - P_j)$. Si può dimostrare che la coppia di interazione è conservativa se e solo se f_{ij} dipende solo da $r_{ij} = |P_i - P_j|$:

Potenziale delle forze interne 4.3.3 *La coppia di interazione $\mathbf{F}_{ij}, \mathbf{F}_{ji}$ è conservativa se e solo se $f_{ij} = f_{ij}(r_{ij})$. Il suo potenziale è*

$$V_{ij} = \int f_{ij}(r_{ij}) dr_{ij}$$

ed il potenziale totale risulta, di conseguenza,

$$V^{(int)} = V^{(int)}(\mathcal{C}) = \sum_{i,j;j>i=1}^n V_{ij}(r_{ij}) = \frac{1}{2} \sum_{i \neq j=1}^n V_{ij}(r_{ij}). \quad (4.37)$$

■

Analogamente a quanto visto per le forze esterne, avremo

$$\mathbf{F}_{ij} = \nabla_i V^{(int)} = -\nabla_j V^{(int)} = -\mathbf{F}_{ji}.$$

Definendo il potenziale totale delle forze conservative

$$V = V^{(int)} + V^{(ext)}$$

si ottiene immediatamente il lavoro prodotto da tali forze:

$$L_{[t_0,t]} = V(\mathcal{C}) - V(\mathcal{C}_0) := \Delta V,$$

dove $\mathcal{C} = \mathcal{C}(t)$ è la configurazione del sistema al tempo t e $\mathcal{C}_0 = \mathcal{C}(t_0)$ è la configurazione iniziale del sistema al tempo t_0 .

Definendo come energia potenziale totale del sistema la funzione

$$U = U(\mathcal{C}) = -V \quad (4.38)$$

e come energia meccanica totale del sistema la somma di energia cinetica ed energia potenziale

$$E = T + U ,$$

il Teorema dell'energia cinetica prende la forma di **Teorema di conservazione dell'energia totale meccanica**:

Teorema di Conservazione dell'Energia 4.3.4 *L'energia meccanica totale di un sistema materiale soggetto a forze conservative rimane costante nel tempo:*

$$T + U = T_0 + U_0 . \quad (4.39)$$

■

Forze attive e reazioni vincolari.

Se consideriamo un sistema materiale soggetto a vincoli, ciascun suo punto è in generale soggetto a forze attive ed a reazioni vincolari, così che la potenza della risultante delle forze agenti sul punto i -esimo si può scomporre nel contributo dovuto a questi due tipi di forze:

$$W_i := \mathbf{F}_i \cdot \mathbf{v}_i = \mathbf{F}_{i,(act)} \cdot \mathbf{v}_i + \mathbf{\Phi}_i \cdot \mathbf{v}_i := W_{i,(act)} + W_{i,\Phi} .$$

Questa suddivisione può naturalmente essere ulteriormente specificata distinguendo i contributi di azioni esercitate dall'esterno del sistema considerato o fra punti del sistema stesso:

$$W_{i,(act)} = W_{i,(act)}^{(ext)} + W_{i,(act)}^{(int)} , \quad W_{i,\Phi} = W_{i,\Phi}^{(ext)} + W_{i,\Phi}^{(int)} .$$

Sommando su tutti i punti del sistema si ottiene la potenza totale delle forze agenti su di esso, secondo la doppia classificazione che è stata introdotta (forze attive esterne ed interne, reazioni vincolari esterne ed interne). La forma differenziale del Teorema dell'energia cinetica (si veda (4.29)) diviene quindi

$$\frac{d}{dt}T = W = W_{(act)}^{(ext)} + W_{(act)}^{(int)} + W_{\Phi}^{(ext)} + W_{\Phi}^{(int)} \quad (4.40)$$

e, integrando rispetto al tempo la (4.40) (si veda la (4.30)), si ottiene

$$\Delta T = T - T_0 = L_{(act)}^{(ext)}([t_0, t]) + L_{(act)}^{(int)}([t_0, t]) + L_{(\Phi)}^{(ext)}([t_0, t]) + L_{(\Phi)}^{(int)}([t_0, t]) , \quad (4.41)$$

con ovvio significato dei simboli. I primi due termini nell'espressione del lavoro sono già stati trattati, resta da discutere il contributo delle reazioni vincolari, che, ricordiamolo, sono forze incognite. Il comportamento dinamico dei vincoli sarà discusso nel prossimo Capitolo, qui ci limiteremo a studiare il caso delle reazioni vincolari di rigidità ed il Teorema dell'Energia Cinetica nel caso di sistemi rigidi.

Potenza e lavoro delle reazioni di rigidità.

Le reazioni di rigidità sono forze interne al sistema, tali da mantenere invariata la distanza fra ciascuna coppia di punti del sistema. Siano P_i e P_j due punti del sistema rigido, le due forze di reazione devono agire secondo la stessa retta d'azione, ovvero quella identificata dal vettore $(P_i - P_j)$ ed inoltre $\Phi_{ij} = -\Phi_{ji}$. Se consideriamo quindi la potenza delle reazioni di rigidità relativa alla coppia di punti P_i, P_j avremo:

$$W_{ij} + W_{ji} = \Phi_{ij} \cdot \mathbf{v}_i + \Phi_{ji} \cdot \mathbf{v}_j = \Phi_{ij} \cdot (\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_j) = \Phi_{ij} \cdot [\boldsymbol{\omega} \wedge (P_i - P_j)], \quad (4.42)$$

dove l'ultimo passaggio è una conseguenza immediata della formula fondamentale della cinematica dei rigidi. Poiché Φ_{ij} è parallela a $(P_i - P_j)$ il prodotto misto è nullo. La potenza delle reazioni di rigidità è dunque sempre nulla e di conseguenza è nullo il lavoro da esse compiuto. I vincoli di rigidità sono quindi vincoli **lisci** o **ideali**.

Potenza e lavoro delle forze esterne su un sistema rigido.

Consideriamo un sistema di forze esterne agenti su di un rigido. La potenza totale sarà data da:

$$W^{(ext)} = \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i^{(ext)} \cdot \mathbf{v}_i. \quad (4.43)$$

Utilizzando la formula fondamentale della cinematica dei rigidi

$$\mathbf{v}_i = \mathbf{v}(P) + \boldsymbol{\omega} \wedge (P_i - P)$$

dove P è un qualunque punto che partecipa al moto rigido, si ottiene facilmente

$$W^{(ext)} = \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i^{(ext)} \cdot [\mathbf{v}(P) + \boldsymbol{\omega} \wedge (P_i - P)] = \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i^{(ext)} \cdot \mathbf{v}(P) + \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i^{(ext)} \cdot [\boldsymbol{\omega} \wedge (P_i - P)].$$

Il primo addendo è ovviamente la potenza della risultante delle forze esterne applicate ad un qualunque punto P partecipante al moto rigido:

$$\sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i^{(ext)} \cdot \mathbf{v}(P) = \mathbf{F}^{(ext)} \cdot \mathbf{v}(P),$$

mentre il secondo addendo, per la proprietà commutativa del prodotto scalare può essere scritto:

$$\sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i^{(ext)} \cdot [\boldsymbol{\omega} \wedge (P_i - P)] = \sum_{i=1}^n [\boldsymbol{\omega} \wedge (P_i - P)] \cdot \mathbf{F}_i^{(ext)}$$

e per la formula del prodotto misto fra vettori:

$$\sum_{i=1}^n [\boldsymbol{\omega} \wedge (P_i - P)] \cdot \mathbf{F}_i^{(ext)} = \left(\sum_{i=1}^n (P_i - P) \wedge \mathbf{F}_i^{(ext)} \right) \cdot \boldsymbol{\omega} = \mathbf{M}^{(ext)}(P) \cdot \boldsymbol{\omega}.$$

La potenza di un sistema di forze esterne agenti su di un rigido si scompone quindi in una parte dovuta al moto traslazionale (la risultante delle forze agenti su un qualunque punto P partecipante al moto rigido) ed una parte dovuta al moto di istantanea rotazione (il momento risultante delle forze calcolato rispetto al punto P moltiplicato scalarmente per il vettore di istantanea rotazione)

$$W^{(ext)} = \mathbf{F}^{(ext)} \cdot \mathbf{v}(P) + \mathbf{M}^{(ext)}(P) \cdot \boldsymbol{\omega}. \quad (4.44)$$

È interessante notare come la (4.44) si riduca solo al primo addendo, se il moto rigido è di traslazione o al secondo addendo se il moto è una precessione attorno a P . Per il calcolo del lavoro occorre integrare la (4.44) rispetto al tempo. Il fatto che tale integrazione sia eseguibile senza già conoscere il moto del sistema dipende dalla natura delle forze agenti su di esso: questo, come visto, è possibile se le forze sono posizionali e le traiettorie dei punti note, oppure se le forze sono conservative.

4.4 Proprietà della matrice di inerzia

In questo paragrafo approfondiamo brevemente (e senza dimostrazioni) le proprietà fondamentali della matrice di inerzia $\sigma(O)$, introdotta nel paragrafo 4.2 al punto (4.20). In questi appunti ci limiteremo a considerare le proprietà algebriche della matrice, tralasciando completamente gli aspetti geometrici ad essa associabili (ellissoide di inerzia), pur essendo questi ultimi assai importanti per una comprensione più intuitiva delle proprietà inerziali dei sistemi rigidi. Per un approfondimento su questo aspetto si rimanda a testi più completi di queste dispense e riportati nella Bibliografia.

La matrice di inerzia $\sigma(O)$ è una matrice reale e simmetrica, il Teorema Spettrale garantisce che è diagonalizzabile per mezzo di una matrice unitaria U

$$\sigma_d(O) = U^t \sigma(O) U = U^{-1} \sigma(O) U,$$

con

$$\sigma_d(O) = \begin{pmatrix} \mathcal{I}_x & 0 & 0 \\ 0 & \mathcal{I}_y & 0 \\ 0 & 0 & \mathcal{I}_z \end{pmatrix} \quad (4.45)$$

dove gli elementi sulla diagonale sono gli autovalori di $\sigma(O)$ e la rappresentazione diagonale si realizza in un riferimento ortonormale individuato dagli autovettori di $\sigma(O)$. Gli autovalori sono reali e positivi, salvo casi singolari (masse allineate, come nel caso di un'asta, nel qual caso il momento di inerzia rispetto alla retta che le contiene è nullo). Una spiegazione molto sintetica della positività degli autovalori di $\sigma(O)$ è data dal fatto che il momento di inerzia di un sistema rispetto ad una qualunque retta passante per il punto O e di versore $\mathbf{u} = \alpha\mathbf{i} + \beta\mathbf{j} + \gamma\mathbf{k}$, si può scrivere vettorialmente come

$$I_{O,\mathbf{u}} = \sum_{i=1}^n m_i [(P_i - O) \wedge \mathbf{u}]^2 \quad (4.46)$$

che risulta evidentemente come una forma quadratica definita positiva, nulla solo nel caso in cui i punti P_i siano allineati sulla retta stessa. La forma quadratica può essere rappresentata da una matrice simmetrica, definita positiva, che risulta essere la $\sigma(O)$, tramite il seguente prodotto scalare:

$$I_{O,\mathbf{u}} = \mathbf{u} \cdot \sigma(O)\mathbf{u}. \quad (4.47)$$

La conoscenza completa delle caratteristiche di inerzia di un sistema rigido può essere ottenuta a partire dalla scelta di un riferimento principale (ovvero un riferimento per cui la matrice di inerzia si presenta in forma diagonale) centrato nel centro di massa del sistema ed ottenendo la forma della matrice negli altri punti per mezzo del Teorema di Huygens-Steiner ³

(si veda il corso di Fisica, I Parte).

4.5 Esempi

Moto libero di un sistema rigido.

Come abbiamo visto nel Capitolo 3, i gradi di libertà di un sistema rigido libero di muoversi in \mathbb{R}^3 sono sei. Una scelta possibile per avere sei coordinate indipendenti è quella di usare le coordinate del centro di massa P_0

³Christiaan Huygens, matematico, astronomo e fisico olandese (L'Aia, 14 aprile 1629 - L'Aia, 8 luglio 1695)– Jakob Steiner, matematico svizzero (Berna, 18 marzo 1796 - Berna, 1 aprile 1863).

e tre angoli indipendenti (per esempio gli angoli di Eulero) per determinare l'orientamento del sistema rigido rispetto ad un osservatore fisso.

Consideriamo quindi le Equazioni Cardinali per un sistema materiale rigido, soggetto a forze esterne:

$$\begin{cases} M\mathbf{a}_{P_0} = \mathbf{F}^{(ext)}, \\ \sigma(P_0)\dot{\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{\omega} \wedge \sigma(P_0)\boldsymbol{\omega} = \mathbf{M}^{(ext)}(P_0), \end{cases} \quad (4.48)$$

dove M è la massa totale del sistema ed il centro di massa P_0 è stato scelto come centro di riduzione dei momenti. Osserviamo che sistemi di forze che abbiano la stessa risultante e lo stesso momento risultante sono del tutto **equivalenti** ai fini degli effetti che producono sul moto del sistema rigido. Dato che i secondi membri delle (4.48) sono funzioni note della configurazione e dell'atto di moto del sistema rigido considerato (oltre che, eventualmente, del tempo) il sistema delle (4.48) si configura come un sistema di sei equazioni differenziali in sei incognite, quindi come un sistema risolubile per il problema ai valori iniziali, purché le funzioni coinvolte siano sufficientemente regolari. Nel caso di un rigido che effettua un moto piano (moto in \mathbb{R}^2) le (4.48) si riducono a tre equazioni differenziali scalari (due componenti per la prima ed una per la seconda), così come a tre si riducono le coordinate necessarie per determinare la configurazione del sistema (due coordinate per individuare la posizione del centro di massa ed un angolo fra riferimento solidale e fisso). Nel caso in cui la prima delle (4.48) sia integrabile indipendentemente dalla seconda (questo avviene se $\mathbf{F}^{(ext)}$ non dipende dagli angoli di Eulero e/o da $\boldsymbol{\omega}$), la seconda equazione si configura come l'equazione di una precessione attorno al centro di massa P_0 . Per poterla integrare occorre evidentemente scegliere un riferimento in cui rappresentarla. Tale scelta è però condizionata dal fatto che $\sigma(P_0)$ è noto (e costante) solo in un riferimento solidale con il sistema rigido. Si può sempre semplificare la rappresentazione della matrice di inerzia, scegliendo un riferimento solidale principale, in modo da averne una rappresentazione in forma diagonale.

La rappresentazione del momento risultante delle forze esterne $\mathbf{M}^{(ext)}(P_0)$ nel riferimento solidale è generalmente una faccenda piuttosto complessa, perché in generale tali forze sono “ben” rappresentabili nel riferimento fisso (si pensi alla forza peso), mentre i vettori $(P_i - O)$, che individuano i punti del sistema rigido, sono costanti e “ben” rappresentabili nel riferimento solidale. Per poter rappresentare il tutto nel riferimento solidale occorre quindi utilizzare le formule di passaggio per i versori fra il riferimento solidale e quello fisso, con il coinvolgimento degli angoli di Eulero (vedere il paragrafo 3.4). Torneremo su questo punto nell'esempio di moto rigido dedicato alle precessioni.

Rotazione attorno ad un asse fisso.

In generale per realizzare questo moto occorre vincolare opportunamente il sistema rigido. Il numero minimo di vincoli ideali per realizzare questo tipo di movimento è costituito da una cerniera sferica (questo vincolo fissa un punto del rigido, permettendo solo moti di precessione attorno ad esso e togliendo tre gradi di libertà al sistema) e da una cerniera cilindrica, collocata in un altro punto, in asse rispetto alla retta congiungente i due punti dove sono collocati i vincoli (questo vincolo toglie due ulteriori gradi di libertà al rigido, lasciandone complessivamente uno solo). Al restante grado di libertà si associa una coordinata angolare che individua l'angolo formato da un asse del riferimento solidale con un asse, ad esso complanare, del riferimento fisso. Per la descrizione del moto conviene scegliere come asse comune ai riferimenti fisso e solidale l'asse di rotazione (scegliamolo come terzo asse dei riferimenti, $\mathbf{k} \equiv \mathbf{e}_3$). Se il centro di massa del sistema si trova sull'asse di rotazione, la I Equazione Cardinale si presenta come bilancio fra le forze attive e le reazioni vincolari necessarie per mantenere fisso l'asse di rotazione:

$$\mathbf{0} = \mathbf{F}_{(act)} + \mathbf{\Phi} ,$$

dove abbiamo ommesso per semplicità di notazione l'apice ^(ext), trattandosi, nel caso del moto dei rigidi, sempre di forze esterne. se invece il centro di massa si trova fuori dell'asse di rotazione, la sua accelerazione rispetto all'osservatore fisso non è nulla, ma si può rappresentare come quella di un punto che si muove di moto circolare ad una distanza d_0 nota dall'asse di rotazione, in funzione dell'angolo ϑ e delle sue derivate temporali. Ricordando la (1.17) e scegliendo per semplicità l'asse delle ascisse del riferimento solidale passante per il centro di massa P_0 , avremo la rappresentazione dell'accelerazione del centro di massa nel sistema solidale:

$$\mathbf{a}_{P_0} = -d_0\dot{\vartheta}^2\mathbf{i} + d_0\ddot{\vartheta}\mathbf{j} , \quad (4.49)$$

mentre per il riferimento fisso (si veda la (1.11)) avremo

$$\mathbf{a}_{P_0} = d_0 \left(-\dot{\vartheta}^2 \cos \vartheta + \ddot{\vartheta} \sin \vartheta \right) \mathbf{e}_1 + d_0 \left(-\dot{\vartheta}^2 \sin \vartheta + \ddot{\vartheta} \cos \vartheta \right) \mathbf{e}_2 . \quad (4.50)$$

Le rappresentazioni (4.49) e (4.50) vanno dunque inserite al primo membro della I Equazione Cardinale, a seconda che la si rappresenti nel riferimento solidale o in quello fisso. In ogni caso questa equazione non risulta risolvibile indipendentemente dalla II Equazione Cardinale per la presenza delle reazioni vincolari incognite.

Per lo studio del moto bisogna ricorrere alla II Equazione Cardinale. Ricordando la rappresentazione della matrice di inerzia $\sigma(O)$ (vedere (4.20)) nel

riferimento solidale, sceglieremo il punto O sull'asse di rotazione, in modo che il piano ortogonale all'asse, che indicheremo con π_0 , contenga anche il centro di massa. Possiamo poi, come detto sopra, scegliere come asse delle x la congiungente O con P_0 e di conseguenza l'asse delle y viene scelta la retta passante per O nel piano ortogonale all'asse di rotazione e ruotata di $\frac{\pi}{2}$ in senso antiorario rispetto al primo asse. Il terzo asse (asse z) è l'asse fisso di rotazione (e quindi $\mathbf{k} \equiv \mathbf{e}_3$ e $z \equiv \zeta$). I primi due assi del riferimento fisso si scelgono nello stesso piano π_0 , in modo che la configurazione del rigido (ovvero del suo riferimento solidale) sia individuata rispetto al riferimento fisso dal solo angolo ϑ , ad esempio l'angolo fra \mathbf{i} ed \mathbf{e}_1 . Questa scelta dei riferimenti rende semplice la rappresentazione del vettore velocità di rotazione ($\boldsymbol{\omega} = \omega \mathbf{k}$), ma non garantisce, ovviamente, che tale riferimento sia un riferimento principale per il sistema rigido e che quindi la matrice di inerzia sia rappresentata in forma diagonale. Se rappresentiamo per componenti nel riferimento solidale così scelto la II Equazione Cardinale (ricordando che $\dot{\omega}_x = \dot{\omega}_y = 0$ e $\omega_x = \omega_y = 0$), avremo:

$$\begin{cases} I_{xz}\dot{\omega}_z - I_{yz}\omega_z^2 = M_x(O) + M_{\Phi,x}(O) \\ I_{yz}\dot{\omega}_z + I_{xz}\omega_z^2 = M_y(O) + M_{\Phi,y}(O) \\ I_{zz}\dot{\omega}_z = M_z(O) + M_{\Phi,z}(O) \end{cases} \quad (4.51)$$

Osserviamo il caso di rotazioni **per inerzia**, ovvero rotazioni avviate da una velocità di rotazione iniziale ω_{0z} e che si mantengono costanti nel tempo in assenza di momenti di forze attive applicate. Le (4.51) si riducono a

$$\begin{cases} -I_{yz}\omega_z^2 = M_{\Phi,x}(O) \\ I_{xz}\omega_z^2 = M_{\Phi,y}(O) \\ 0 = M_{\Phi,z}(O) \end{cases} \quad (4.52)$$

Come si vede dalla terza equazione delle (4.52), la rotazione uniforme richiede che i vincoli non esercitino reazioni di momento assiale (parallelo all'asse di rotazione), ovvero che i vincoli siano **lisci**. Al contrario, sono necessarie reazioni vincolari di momento non nullo nel piano π_0 , a meno che l'asse di rotazione (asse z del riferimento solidale), non sia un asse principale di inerzia; in tal caso, infatti, $I_{xz} = I_{yz} = 0$ e la rotazione uniforme si mantiene senza sollecitazione dei vincoli.

Precessioni e precessioni per inerzia.

Consideriamo adesso il moto di precessione di un sistema rigido attorno ad un suo punto. Questo tipo di moto si può realizzare fissando il centro della

precessione, diciamo O mediante una cerniera sferica, che impedisce quindi i movimenti di traslazione e lascia tre gradi di libertà al sistema, descrivibili, per esempio, dagli angoli di Eulero. Se i vincoli sono lisci non devono esercitare reazioni che influiscano sul moto, quindi il momento delle reazioni vincolari deve essere nullo. Se anche il momento delle forze attive è nullo (un esempio può essere quello di un corpo pesante sospeso per il suo centro di massa), la precessione avviene **per inerzia** a partire da un atto di moto iniziale non nullo. Scegliendo un riferimento solidale principale, in modo da avere una matrice di inerzia diagonale, la rappresentazione della II Equazione Cardinale in questo riferimento è molto semplice:

$$\begin{cases} \mathcal{I}_x \dot{\omega}_x = (\mathcal{I}_y - \mathcal{I}_z) \omega_y \omega_z \\ \mathcal{I}_y \dot{\omega}_y = (\mathcal{I}_z - \mathcal{I}_x) \omega_z \omega_x \\ \mathcal{I}_z \dot{\omega}_z = (\mathcal{I}_x - \mathcal{I}_y) \omega_x \omega_y \end{cases} . \quad (4.53)$$

Dal punto di vista fisico, vista l'assenza di momenti di forze, possiamo affermare che si conservano sia l'energia cinetica che il momento angolare del sistema:

$$T = T_0 , \quad \mathbf{K}(O) = \mathbf{K}_0(O) ,$$

dove T_0 e $\mathbf{K}_0(O)$ rappresentano, rispettivamente, il valore iniziale dell'energia cinetica e del momento angolare. L'integrale primo dell'energia cinetica si ottiene dalle (4.53) moltiplicando la prima equazione per ω_x , la seconda per ω_y , la terza per ω_z e sommandole. Si ottiene così

$$\mathcal{I}_x \dot{\omega}_x \omega_x + \mathcal{I}_y \dot{\omega}_y \omega_y + \mathcal{I}_z \dot{\omega}_z \omega_z = 0$$

dove il primo membro non è altro che la derivata rispetto al tempo dell'energia cinetica:

$$\mathcal{I}_x \dot{\omega}_x \omega_x + \mathcal{I}_y \dot{\omega}_y \omega_y + \mathcal{I}_z \dot{\omega}_z \omega_z = \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} (\mathcal{I}_x \omega_x^2 + \mathcal{I}_y \omega_y^2 + \mathcal{I}_z \omega_z^2) \right] = \frac{d}{dt} T .$$

Il momento angolare resta costante nel riferimento fisso (dove si scrive la II Equazione Cardinale). Avremo quindi

$$\mathbf{0} = \frac{d}{dt} \mathbf{K}(O) \Big|_{\Sigma} = \frac{d}{dt} \mathbf{K}(O) \Big|_S + \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{K}(O) .$$

Abbiamo quindi la legge di evoluzione del momento angolare nel riferimento solidale S data da

$$\frac{d}{dt} \mathbf{K}(O) \Big|_S = \mathbf{K}(O) \wedge \boldsymbol{\omega} ,$$

che, nel riferimento solidale S , è rappresentata in componenti dalle (4.53). Il moto per inerzia ammette anche una descrizione geometrica (moto alla Poincot), che qui tralasciamo completamente.

Precessioni pesanti e rigidi a struttura giroscopica.

Consideriamo adesso il moto di precessione di un sistema rigido qualsiasi, soggetto alla forza peso e fissato in un suo punto O , diverso dal centro di massa P_0 , mediante una cerniera sferica liscia. Il moto che ne deriva è provocato, oltre che dalle condizioni iniziali, dal momento non nullo del peso rispetto al punto O .

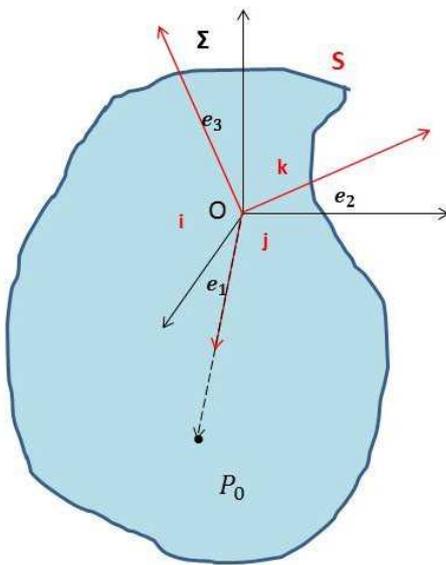


Figura 4.1

La difficoltà che nasce in questo problema è data dal fatto che, mentre il momento angolare (e la sua derivata) del rigido ed il vettore $(P_0 - O)$ sono rappresentabili “facilmente” (e costanti) in un riferimento solidale S , il peso ha la sua rappresentazione immediata nel sistema fisso Σ . Se scegliamo l’asse x (di versore \mathbf{i}) coincidente in direzione e verso col vettore $(P_0 - O)$, questo consente di rappresentare in maniera semplice il vettore stesso.

D’altra parte, se tale asse non coincide con un asse principale di inerzia, la matrice $\sigma(O)$ non risulterà in forma diagonale, complicando notevolmente la rappresentazione della II Equazione Cardinale. Consideriamo il caso rappresentato in Fig. 4.1, dove la terna fissa Σ è disegnata in nero e la terna solidale S in rosso. Il vettore $(P_0 - O)$ viene facilmente rappresentato in S come $(P_0 - O) = d_0\mathbf{i}$, dove d_0 è la distanza fra il centro di massa P_0 e il polo della precessione O , mentre la matrice di inerzia avrà in generale, come già detto, la forma completa (4.20). Di conseguenza, riprendendo la (3.30)

$$\mathbf{e}_3 = \sin \vartheta \sin \varphi \mathbf{i} + \sin \vartheta \cos \varphi \mathbf{j} + \cos \vartheta \mathbf{k} ,$$

dove abbiamo l’espressione del versore fisso \mathbf{e}_3 nella base del riferimento solidale, avremo la rappresentazione in S del momento risultante della forza

peso:

$$\mathbf{M}_{\text{peso}}(O) = (P_0 - O) \wedge m\mathbf{g} = d_0\mathbf{i} \wedge (-mg\mathbf{e}_3) = mgd_0(\cos\vartheta\mathbf{j} - \sin\vartheta\cos\varphi\mathbf{k}), \quad (4.54)$$

dove m è la massa totale del rigido e \mathbf{g} il vettore accelerazione di gravità.

Per quanto riguarda il primo membro della II Equazione Cardinale, con la matrice di inerzia in forma completa, avremo:

$$\sigma(O)\dot{\boldsymbol{\omega}} = \begin{pmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{xy} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{xz} & I_{yz} & I_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\omega}_x \\ \dot{\omega}_y \\ \dot{\omega}_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{xx}\dot{\omega}_x + I_{xy}\dot{\omega}_y + I_{xz}\dot{\omega}_z \\ I_{xy}\dot{\omega}_x + I_{yy}\dot{\omega}_y + I_{yz}\dot{\omega}_z \\ I_{xz}\dot{\omega}_x + I_{yz}\dot{\omega}_y + I_{zz}\dot{\omega}_z \end{pmatrix}.$$

Si può capire come il risultato in componenti del riferimento S del rimanente termine $\boldsymbol{\omega} \wedge \sigma(O)\boldsymbol{\omega}$ sia realmente molto lungo e poco “maneggevole”. Lo riportiamo qui sotto:

$$\boldsymbol{\omega} \wedge \sigma(O)\boldsymbol{\omega} = \begin{pmatrix} (I_{xz}\omega_x + I_{yz}\omega_y + I_{zz}\omega_z)\omega_y - (I_{xy}\omega_x + I_{yy}\omega_y + I_{yz}\omega_z)\omega_z \\ (I_{xx}\omega_x + I_{xy}\omega_y + I_{xz}\omega_z)\omega_z - (I_{xz}\omega_x + I_{yz}\omega_y + I_{zz}\omega_z)\omega_x \\ (I_{xy}\omega_x + I_{yy}\omega_y + I_{yz}\omega_z)\omega_x - (I_{xx}\omega_x + I_{xy}\omega_y + I_{xz}\omega_z)\omega_y \end{pmatrix}.$$

Come si vede, le tre componenti in S della II Equazione Cardinale coinvolgono tutti gli elementi di inerzia del sistema rigido e tutte le componenti della velocità di istantanea rotazione $\boldsymbol{\omega}$ e della sua derivata.

Un approccio diverso, che semplifica di molto la scrittura della II Equazione Cardinale, si ottiene scegliendo il riferimento principale in O , che diagonalizza la matrice di inerzia, come nel caso rappresentato in Fig. 4.2, dove, come in Fig. 4.1, la terna fissa Σ è disegnata in nero e la terna solidale S in rosso.

Il vettore $(P_0 - O)$ non avrà la semplice rappresentazione del caso precedente, ma in generale avrà componenti lungo tutte le direzioni del riferimento solidale S :

$$(P_0 - O) = d_0(\alpha \mathbf{i} + \beta \mathbf{j} + \gamma \mathbf{k}),$$

dove α, β, γ sono i coseni direttori del vettore $(P_0 - O)$ nel riferimento S e quindi noti e costanti nel tempo (in S). Calcolando il prodotto vettoriale

$$(P_0 - O) \wedge m \mathbf{g},$$

il momento della forza peso risulta quindi

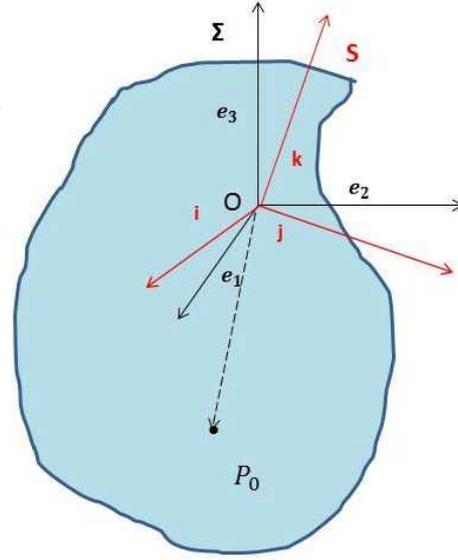


Figura 4.2

$$\mathbf{M}_{\text{peso}}(O) = mgd_0 \begin{pmatrix} \gamma \sin \vartheta \cos \varphi - \beta \cos \vartheta \\ \alpha \sin \vartheta \cos \varphi - \gamma \sin \vartheta \sin \varphi \\ \beta \sin \vartheta \sin \varphi - \alpha \sin \vartheta \cos \varphi \end{pmatrix}, \quad (4.55)$$

dove abbiamo utilizzato il formalismo del vettore colonna per esigenze di spazio. Possiamo scrivere le componenti in S della II Equazione Cardinale, tenendo conto che la matrice di inerzia $\sigma(O)$ è diagonale come nel caso delle precessioni per inerzia, le cui equazioni sono riportate in (4.53):

$$\begin{cases} \mathcal{I}_x \dot{\omega}_x + (\mathcal{I}_z - \mathcal{I}_y) \omega_y \omega_z = mgd_0 (\gamma \sin \vartheta \cos \varphi - \beta \cos \vartheta) \\ \mathcal{I}_y \dot{\omega}_y + (\mathcal{I}_x - \mathcal{I}_z) \omega_z \omega_x = mgd_0 (\alpha \sin \vartheta \cos \varphi - \gamma \sin \vartheta \sin \varphi) \\ \mathcal{I}_z \dot{\omega}_z + (\mathcal{I}_y - \mathcal{I}_x) \omega_x \omega_y = mgd_0 (\beta \sin \vartheta \sin \varphi - \alpha \sin \vartheta \cos \varphi) \end{cases} \quad (4.56)$$

Il risultato di questa seconda scelta è sicuramente più semplice del precedente, ma il punto fondamentale, che accomuna le due situazioni, è che nelle equazioni compaiono anche gli angoli di Eulero, ovvero le incognite di configurazione, oltre alle incognite cinematiche costituite dalle componenti della velocità di istantanea rotazione $\boldsymbol{\omega}$. Questo significa che, a differenza del caso (4.53), o di situazioni in cui il momento delle forze esterne dipenda solo da $\boldsymbol{\omega}$, le equazioni di moto del rigido non possono essere integrate in due passi successivi (prima si risolve un'equazione differenziale del I ordine nelle incognite $\omega_x, \omega_y, \omega_z$, poi si considera la loro espressione in funzione degli angoli di

Eulero e le loro derivate (si veda la (3.31)) e si integra ancora un'equazione del I ordine), ma occorre introdurre subito nelle (4.56) la (3.31) per scrivere subito un sistema di equazioni differenziali del II ordine, non lineari, ed in generale molto complesse da trattare.

Un'osservazione importante da fare sul problema delle precessioni pesanti è che una semplificazione fondamentale deriva da considerazioni di carattere fisico, infatti il sistema è conservativo, quindi l'energia totale meccanica è costante

$$T + U = \frac{1}{2}\sigma(O)\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\omega} + mgd_0 \cos \vartheta = \text{costante},$$

e costituisce quindi un integrale primo del moto. Un'ulteriore semplificazione si ha quando il rigido considerato ha un asse di simmetria e, quindi, su di esso si trova il centro di massa del sistema. Se il punto fisso (polo della precessione) O giace su tale asse, si può far coincidere con esso l'asse \mathbf{k} del riferimento solidale ed il momento della forza peso $(P_0 - O) \wedge m\mathbf{g} = mgd_0(\mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{k})$ risulta ortogonale a \mathbf{k} e quindi la componente assiale $\mathbf{M}_{\text{peso}}(O) \cdot \mathbf{k} = 0$.

4.6 Appendice

Il teorema di Huygens-Steiner fornisce una formula per passare da momenti di inerzia e centrifughi centrali (riferiti cioè a rette e piani passanti per il centro di massa di un sistema materiale) a momenti riferiti a rette e piani paralleli a quelli centrali. Consideriamo un sistema materiale \mathfrak{M} composto da n punti materiali P_i , ciascuno di massa m_i , il cui centro di massa sarà indicato con P_0 (si veda la (4.2)). Il momento di inerzia di \mathfrak{M} rispetto ad una retta r passante per un punto qualunque O è definito come

$$I_r = \sum_{i=1}^n m_i [(P_i - O) \wedge \mathbf{u}]^2, \quad (4.57)$$

dove il versore \mathbf{u} individua la direzione della retta r passante per il punto O e $[(P_i - O) \wedge \mathbf{u}]^2$ rappresenta in termini vettoriali il quadrato della distanza d_i del punto P_i dalla retta r passante per O . Il momento centrifugo di \mathfrak{M} rispetto a una coppia di piani π e π' non paralleli che si intersecano lungo una retta passante per il punto O è definito come

$$I_{\pi\pi'} = - \sum_{i=1}^n m_i [(P_i - O) \cdot \mathbf{n}] [(P_i - O) \cdot \mathbf{n}'], \quad (4.58)$$

dove i versori \mathbf{n} e \mathbf{n}' individuano la giacitura, rispettivamente, del piano π e del piano π' e $[(P_i - O) \cdot \mathbf{n}]$ e $[(P_i - O) \cdot \mathbf{n}']$ esprimono in termini vettoriali le distanze d_i e d'_i dei punti P_i dai piani π e π' .

Consideriamo la (4.57) e cerchiamo la relazione fra i momenti di inerzia di \mathfrak{M} rispetto a due rette fra loro parallele, che indichiamo con r ed r' , la prima passante per O e la seconda per un qualunque punto, che indichiamo con O' , la direzione di entrambe essendo individuata dal versore \mathbf{u} . Se introduciamo il passaggio per O' nel vettore $(P_i - O)$ abbiamo:

$$\begin{aligned}
 I_r &= \sum_{i=1}^n m_i [(P_i - O' + O' - O) \wedge \mathbf{u}]^2 \\
 &= \sum_{i=1}^n m_i [(P_i - O') \wedge \mathbf{u}]^2 + M[(O' - O) \wedge \mathbf{u}]^2 \\
 &\quad + 2[(O' - O) \wedge \mathbf{u}] \cdot \sum_{i=1}^n m_i [(P_i - O') \wedge \mathbf{u}] \\
 &= I_{r'} + M d_{rr'}^2 + 2[(O' - O) \wedge \mathbf{u}] \cdot \sum_{i=1}^n m_i [(P_i - O') \wedge \mathbf{u}] ,
 \end{aligned} \tag{4.59}$$

dove $I_{r'}$ è il momento di inerzia del sistema \mathfrak{M} rispetto ad una retta parallela ad r e passante per O' e $d_{rr'}$ è la distanza fra le due rette. La (4.59) rappresenta la formula generale per trasferire il momento di inerzia di un sistema, calcolato rispetto ad una retta qualsiasi, ad un'altra retta ad essa parallela. È evidente che, se scegliamo per O' il centro di massa P_0 , la formula si semplifica, essendo nullo per definizione il termine $\sum_{i=1}^n m_i [(P_i - P_0) \wedge \mathbf{u}]$. La versione semplificata della (4.59) costituisce il teorema di Huygens-Steiner:

Teorema di Huygens-Steiner 4.6.1 *Dato un sistema materiale $\{P_i, m_i\}$, $i = 1, \dots, n$, di centro di massa P_0 , il momento di inerzia I_r del sistema rispetto ad una retta r passante per un punto O ed avente direzione individuata dal versore \mathbf{u} è dato dal momento di inerzia del sistema calcolato rispetto ad una retta r_0 parallela ad r e passante per il centro di massa P_0 a cui va sommato il prodotto fra la massa totale M del sistema ed il quadrato della distanza fra le due rette:*

$$I_r = I_{r_0} + M[(P_0 - O) \wedge \mathbf{u}]^2 . \quad \blacksquare$$

Osserviamo che, posto per semplicità $[(P_0 - O) \wedge \mathbf{u}]^2 = d_{rr_0}^2$ e $[(P_0 - O') \wedge \mathbf{u}]^2 = d_{r'r_0}^2$, possiamo scrivere

$$I_r = I_{r_0} + M d_{rr_0}^2$$

e, per una qualunque altra retta r' parallela ad r :

$$I_{r'} = I_{r_0} + M d_{r'r_0}^2 ,$$

fornendo così una semplice formula per “trasferire” il momento di inerzia fra due rette parallele qualsiasi:

$$I_{r'} = I_r + M (d_{r'r_0}^2 - d_{rr_0}^2) .$$

Un risultato analogo si prova, grazie alle proprietà del centro di massa, anche per i momenti centrifughi. Basta infatti inserire nella (4.58) il “passaggio” per il centro di massa P_0 nei vettori $(P_i - O)$ per ottenere

$$I_{\pi\pi'} = I_{\pi_0\pi'_0} - M[(P_0 - O) \cdot \mathbf{n}][(P_0 - O) \cdot \mathbf{n}'] , \quad (4.60)$$

dove π_0 e π'_0 sono piani passanti per P_0 e paralleli rispettivamente a π e π' .

Il teorema di Huygens-Steiner, nelle due versioni per i momenti di inerzia ed i momenti centrifughi, garantisce che la conoscenza della matrice di inerzia centrale è sufficiente per la conoscenza delle proprietà di inerzia di un sistema materiale rispetto ad ogni altro punto dello spazio. Inoltre la conoscenza della matrice di inerzia rispetto ad un punto qualsiasi O permette di calcolare il momento di inerzia del sistema rispetto a qualsiasi retta passante per O , essendo nota la sua direzione, individuata dal versore \mathbf{u} , rispetto alla terna solidale scelta. Infatti, esplicitando la (4.46) o la (4.47) e tenendo conto di (4.20), si ottiene:

$$I_{O,\mathbf{u}} = I_{xx}\alpha^2 + I_{yy}\beta^2 + I_{zz}\gamma^2 + 2I_{xy}\alpha\beta + 2I_{yz}\beta\gamma + 2I_{xz}\gamma\alpha ,$$

dove $\mathbf{u} = \alpha\mathbf{i} + \beta\mathbf{j} + \gamma\mathbf{k}$.

Una formula analoga si prova per i momenti centrifughi rispetto ad una qualunque coppia di piani π e π' passanti per O , origine del riferimento solidale e individuati dai versori normali $\mathbf{n} = \alpha\mathbf{i} + \beta\mathbf{j} + \gamma\mathbf{k}$ e $\mathbf{n}' = \alpha'\mathbf{i} + \beta'\mathbf{j} + \gamma'\mathbf{k}$:

$$I_{\pi\pi'} = I_x\alpha\alpha' + I_y\beta\beta' + I_z\gamma\gamma' + I_{xy}(\alpha\beta' + \alpha'\beta) + I_{yz}(\beta\gamma' + \beta'\gamma) + I_{xz}(\gamma\alpha' + \gamma'\alpha) ,$$

dove

$$I_x = - \sum_{i=1}^n m_i x_i^2 , \quad I_y = - \sum_{i=1}^n m_i y_i^2 , \quad I_z = - \sum_{i=1}^n m_i z_i^2$$

sono i momenti del secondo ordine rispetto ai piani coordinati.

Capitolo 5

Meccanica lagrangiana

5.1 Introduzione

La Meccanica lagrangiana ¹ non modifica il contesto della Meccanica newtoniana, ai cui Principi aderisce pienamente, ma la affronta con un approccio differente che, in prospettiva, amplierà enormemente i campi di applicazione. Le differenze sostanziali stanno nel tipo di grandezze fisiche utilizzate per la descrizione e la previsione del moto dei sistemi materiali. La Meccanica di Newton si può ben definire come una **Meccanica vettoriale**, usando forze ed accelerazioni per descrivere le leggi del moto. Lagrange, al contrario, si muove sulla scia di Leibniz ², utilizzando grandezze fisiche scalari, quali il lavoro e l'energia. Su questa strada i suoi predecessori, oltre a Leibniz stesso, sono Johann Bernoulli ³, che per primo formulò il **Principio dei lavori virtuali** nel caso statico, e d'Alembert ⁴, che lo estese al caso dinamico. In contrapposizione all'impianto newtoniano possiamo quindi parlare di una **Meccanica scalare**. L'altro aspetto che caratterizza il metodo lagrangiano è dato dal modo di classificare e trattare i vincoli che limitano il moto di un sistema materiale. La presenza di vincoli che limitano solo le posizioni (e non velocità o accelerazioni) dei punti e che sono detti **olonomi** può essere inclusa nella teoria generale introducendo un opportuno sistema di coordinate libere (quindi non vincolate) pari al numero di gradi di libertà del sistema stesso. Il moto del sistema non è più visto quindi come quello di un insieme di punti che si muovono in \mathbb{R}^3 , legati fra loro dalle relazioni vincolari, ma

¹Joseph-Louis Lagrange, matematico e astronomo italiano (Torino, 25 gennaio 1736 - Parigi, 10 aprile 1813)

²Gottfried Wilhelm von Leibniz, matematico, filosofo e scienziato tedesco (Lipsia, 1° luglio 1646 - Hannover, 14 novembre 1716).

³Johann Bernoulli, matematico svizzero (Basilea, 27 luglio 1667 - Basilea, 1° gennaio 1748).

⁴Jean-Baptiste Le Rond d'Alembert, enciclopedista, matematico, fisico, filosofo ed astronomo francese (Parigi, 16 novembre 1717 - Parigi, 29 ottobre 1783).

come il moto di un punto libero che si muove su di una “superficie”⁵ che ha dimensioni pari al numero dei gradi di libertà del sistema.

Ulteriori sviluppi, successivi a Lagrange, e che non tratteremo, si trovano nell’approccio hamiltoniano⁶, che non presenta vantaggi nello studio di sistemi vincolati, ma che ha proposto il formalismo adatto per la Meccanica quantistica, per i sistemi a molte particelle (Meccanica statistica), aprendo la via anche a nuove metodologie matematiche (metodi variazionali, teoria delle perturbazioni...).

5.2 Il punto libero

Consideriamo una particella o punto materiale libero P , di massa m , nello spazio \mathbb{R}^3 . Rispetto ad un osservatore inerziale, il suo moto è descritto dalla II Legge di Newton, i.e.

$$m\mathbf{a} = \mathbf{F}, \quad (5.1)$$

dove \mathbf{a} è l’accelerazione del punto e \mathbf{F} rappresenta la risultante di tutte le forze di origine materiale agenti su P che, in generale, è funzione della posizione del punto, della sua velocità \mathbf{v} e del tempo.

Se esprimiamo il vettore posizione in un riferimento euclideo ortogonale, mediante coordinate cartesiane, avremo che $(P - O) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$, dove O è l’origine del riferimento e $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ rappresentano i versori degli assi orientati del riferimento. Proiettando la (5.1) sulle direzioni associate agli assi otteniamo un sistema di tre equazioni differenziali del secondo ordine in forma normale

$$\begin{cases} m\ddot{x} = F_x(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}; t) \\ m\ddot{y} = F_y(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}; t) \\ m\ddot{z} = F_z(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}; t) \end{cases} \quad (5.2)$$

in generale accoppiate fra loro, ma che al secondo membro esibiscono le componenti lungo gli assi delle forze attive.

Se cambiamo il sistema di coordinate non avremo però una forma altrettanto semplice. Ad esempio, la (5.1) scritta in coordinate polari sferiche e proiettata

⁵Il termine corretto è varietà differenziale.

⁶Sir William Rowan Hamilton, matematico, fisico e astronomo irlandese (Dublino, 4 agosto 1805 - Dublino, 2 settembre 1865).

sui versori corrispondenti della base “sferica” ha la forma (si veda la (1.31))

$$\begin{cases} m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\dot{\phi}^2 \sin^2 \theta) = F_r(r, \phi, \theta, \dot{r}, \dot{\theta}, \dot{\phi}; t) \\ m(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} - r\dot{\phi}^2 \sin \theta \cos \theta) = F_\theta(r, \phi, \theta, \dot{r}, \dot{\theta}, \dot{\phi}; t) \\ m(r\ddot{\phi} \sin \theta + 2r\dot{\theta}\dot{\phi} \cos \theta + 2\dot{r}\dot{\phi} \sin \theta) = F_\phi(r, \phi, \theta, \dot{r}, \dot{\theta}, \dot{\phi}; t), \end{cases} \quad (5.3)$$

dove $F_r = \mathbf{F} \cdot \mathbf{u}_r$, $F_\theta = \mathbf{F} \cdot \mathbf{u}_\theta$, $F_\phi = \mathbf{F} \cdot \mathbf{u}_\phi$. Le (5.3) non si presentano nella forma semplice delle (5.2), dalla chiara interpretazione fisica, e non sono nemmeno in forma normale. Possiamo vedere se esiste una forma unitaria per l'equazione di moto del punto materiale, indipendentemente dalla scelta del sistema di coordinate e della base di versori ad esse associate. Il punto libero P è individuato da tre coordinate, che indicheremo genericamente con q_1, q_2, q_3 , $P = P(q_1, q_2, q_3)$ che, partendo dalla rappresentazione cartesiana, in componenti si scrive:

$$x = x(q_1, q_2, q_3), \quad y = y(q_1, q_2, q_3), \quad z = z(q_1, q_2, q_3). \quad (5.4)$$

Una trasformazione di coordinate richiede che le funzioni che determinano tale cambiamento, siano regolari ed invertibili, ovvero che siano di classe \mathcal{C}^1 e che lo Jacobiano della trasformazione abbia rango massimo in un dominio $D \in \mathbb{R}^3$, detto dominio di invertibilità, i.e.:

$$\det J = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial q_1} & \frac{\partial x}{\partial q_2} & \frac{\partial x}{\partial q_3} \\ \frac{\partial y}{\partial q_1} & \frac{\partial y}{\partial q_2} & \frac{\partial y}{\partial q_3} \\ \frac{\partial z}{\partial q_1} & \frac{\partial z}{\partial q_2} & \frac{\partial z}{\partial q_3} \end{pmatrix} \neq 0. \quad (5.5)$$

La (5.5) implica l'indipendenza lineare dei tre vettori

$$\frac{\partial P}{\partial q_1} = \left(\frac{\partial x}{\partial q_1}, \frac{\partial y}{\partial q_1}, \frac{\partial z}{\partial q_1} \right)^T$$

$$\frac{\partial P}{\partial q_2} = \left(\frac{\partial x}{\partial q_2}, \frac{\partial y}{\partial q_2}, \frac{\partial z}{\partial q_2} \right)^T$$

$$\frac{\partial P}{\partial q_3} = \left(\frac{\partial x}{\partial q_3}, \frac{\partial y}{\partial q_3}, \frac{\partial z}{\partial q_3} \right)^T$$

che formano dunque una possibile base in \mathbb{R}^3 . Inoltre, tali vettori sono tangenti alle curve coordinate

$$P = P(q_1, \cdot, \cdot), \quad P = P(\cdot, q_2, \cdot), \quad P = P(\cdot, \cdot, q_3)$$

che si ottengono dalle (5.4) facendo variare una alla volta le q_h , $h = 1, 2, 3$. La (5.1) è dunque equivalente alle tre equazioni scalari che si ottengono dalla sua proiezione sulle direzioni dei tre vettori $\frac{\partial P}{\partial q_h}$, $h = 1, 2, 3$:

$$m\mathbf{a} \cdot \frac{\partial P}{\partial q_h} = \mathbf{F} \cdot \frac{\partial P}{\partial q_h}, \quad h = 1, 2, 3. \quad (5.6)$$

Il secondo membro rappresenta la proiezione della risultante delle forze attive agenti su P sulle direzioni tangenti alle linee coordinate e prende il nome di componente lagrangiana delle forze e definita come

$$F_{\mathcal{T},h} := \mathbf{F} \cdot \frac{\partial P}{\partial q_h}. \quad (5.7)$$

Nel caso che la risultante \mathbf{F} sia ricavabile da un potenziale V , anche dipendente dal tempo, ovvero $\mathbf{F} = \nabla V(P, t)$ avremo

$$\mathbf{F} \cdot \frac{\partial P}{\partial q_h} = \nabla V \cdot \frac{\partial P}{\partial q_h} = \frac{\partial V}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial q_h} + \frac{\partial V}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial q_h} + \frac{\partial V}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial q_h} = \frac{\partial V}{\partial q_h}, \quad h = 1, 2, 3. \quad (5.8)$$

Per quanto riguarda il primo membro, possiamo, con alcuni passaggi, ricondurlo ad una forma che coinvolge l'energia cinetica di P (il binomio di Lagrange).

Osserviamo prima di tutto che i vettori tangenti alle linee coordinate $\frac{\partial P}{\partial q_h}$ possono essere anche scritti, in alternativa, per mezzo della velocità \mathbf{v} del punto P . Infatti, poiché, P dipende dal tempo tramite le coordinate q_h , ($h = 1, 2, 3$) con cui viene rappresentato, $P = P(q_h(t))$ ($h = 1, 2, 3$), avremo

$$\mathbf{v} = \frac{dP}{dt} = \sum_{h=1}^3 \frac{\partial P}{\partial q_h} \dot{q}_h \quad (5.9)$$

e quindi, come immediata conseguenza della (5.9)

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \dot{q}_h} = \frac{\partial P}{\partial q_h}. \quad (5.10)$$

Per il primo membro della (5.6) avremo dunque

$$m\mathbf{a} \cdot \frac{\partial P}{\partial q_h} = m\mathbf{a} \cdot \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \dot{q}_h}.$$

Ricordando la definizione di energia cinetica

$$T := \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}$$

avremo che

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_h} = m\mathbf{v} \cdot \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \dot{q}_h} \quad (5.11)$$

e derivando la (5.11) rispetto al tempo

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_h} \right) = m\mathbf{a} \cdot \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \dot{q}_h} + m\mathbf{v} \cdot \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \dot{q}_h} \right). \quad (5.12)$$

Nell'ultimo termine della (5.12) possiamo introdurre nuovamente il vettore $\frac{\partial P}{\partial q_h}$ al posto di $\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \dot{q}_h}$:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \dot{q}_h} \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial P}{\partial q_h} \right)$$

e, per la regolarità delle funzioni considerate, scambiare la derivata rispetto al tempo con la derivata parziale rispetto alla coordinata q_h :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial P}{\partial q_h} \right) = \frac{\partial}{\partial q_h} \left(\frac{dP}{dt} \right) = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial q_h}.$$

L'ultimo termine della (5.12) può dunque essere scritto nel modo seguente

$$m\mathbf{v} \cdot \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \dot{q}_h} \right) = m\mathbf{v} \cdot \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial q_h} = \frac{\partial T}{\partial q_h}, \quad (5.13)$$

dove il secondo passaggio risulta immediatamente dalla definizione di energia cinetica.

Introducendo la (5.13) nella (5.12) si ottiene l'espressione del binomio di Lagrange

$$m\mathbf{a} \cdot \frac{\partial P}{\partial q_h} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_h} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_h}. \quad (5.14)$$

Dalle (5.7) e (5.14) si ottiene l'equazione di Eulero⁷-Lagrange per il punto libero, nella forma invariante rispetto a trasformazioni di coordinate:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_h} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_h} = F_{\mathcal{T},h}, \quad h = 1, 2, 3. \quad (5.15)$$

Facendo riferimento alle (5.7) e (5.8), possiamo distinguere nella componente lagrangiana delle forze la parte che proviene da forze non conservative (ad

⁷Leonhard Euler, noto in Italia come Eulero, matematico e fisico svizzero (Basilea, 15 aprile 1707 - San Pietroburgo, 18 settembre 1783).

esempio forze dissipative come la resistenza viscosa) da quelle forze ricavabili da un potenziale (ad esempio il peso, una forza elastica, l'attrazione gravitazionale)

$$F_{T,h} = F_{T,h}^c + F_{T,h}^{nc},$$

dove $F_{T,h}^c$ è esprimibile per mezzo di un potenziale V

$$F_{T,h}^c = \frac{\partial V}{\partial q_h} = -\frac{\partial U}{\partial q_h}, \quad h = 1, 2, 3,$$

dove U è l'energia potenziale, in generale dipendente dalle q_h e al più dal tempo. Poiché U non dipende dalle \dot{q}_h , avremo ovviamente

$$\frac{\partial U}{\partial \dot{q}_h} = 0.$$

Questo ci permette di introdurre la funzione Lagrangiana

$$\mathcal{L} := T + V = T - U \quad (5.16)$$

e di scrivere l'equazione di Eulero-Lagrange (5.14) nella forma

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_h} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_h} = F_{T,h}^{nc}, \quad h = 1, 2, 3, \quad (5.17)$$

che, nel caso di forze attive tutte ottenibili da un potenziale, prende la forma "conservativa":

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_h} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_h} = 0, \quad h = 1, 2, 3. \quad (5.18)$$

5.3 Il punto vincolato

Il punto vincolato ad una superficie.

Consideriamo adesso il caso di un punto vincolato ad una superficie o ad una linea, eventualmente dipendenti esplicitamente dal tempo, cioè mobili con legge nota.

Consideriamo per primo il caso della superficie. La rappresentazione globale di una superficie in \mathbb{R}^3 può essere data da un'equazione del tipo

$$f(x, y, z) = 0, \quad \{x, y, z\} \in \mathbb{D} \subseteq \mathbb{R}^3$$

che lega in una relazione implicita le tre coordinate (in questo caso cartesiane) del punto. Sulla funzione f vengono poi imposte condizioni di regolarità, nel senso che in ogni punto del dominio di definizione deve essere definita la normale e, quindi, il piano tangente. Questa condizione comporta che la f

sia di classe \mathcal{C}^1 sul suo dominio di definizione e che $\nabla f \neq 0$, ovvero che il vettore

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right)^T$$

non abbia mai le tre componenti contemporaneamente nulle. Questa condizione può essere espressa in un modo alternativo, ma più generale, considerando il vettore ∇f come una matrice (3×1) e richiedendo a tale matrice di avere rango massimo (cioè uguale a 1). Le considerazioni fin qui espresse non cambiano se il punto è vincolato ad una superficie mobile con legge nota (ad esempio il piano dell'ascensore $z = vt$, con velocità v costante, oppure una superficie sferica, con centro nell'origine, che si dilata con legge assegnata, $x^2 + y^2 + z^2 - v^2 t^2 = 0$). L'equazione del vincolo prenderà allora la forma

$$f(x, y, z; t) = 0, \quad \{x, y, z\} \in \mathbb{D} \subseteq \mathbb{R}^3, \quad t \geq t_0. \quad (5.19)$$

Le ipotesi formulate ($f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{D} \times [t_0, +\infty)$, $\nabla f \neq 0$) garantiscono l'applicabilità del Teorema della funzione implicita (Teorema del Dini ⁸), ovvero che in ogni punto $P = (x, y, z; t)$, t.c. $f(P; t) = 0$, esiste almeno un intorno aperto Ω_P dove la superficie è descritta localmente da due parametri q_1, q_2 e dal tempo t :

$$\begin{cases} x = x(q_1, q_2; t) \\ y = y(q_1, q_2; t) \\ z = z(q_1, q_2; t) \end{cases}. \quad (5.20)$$

Questa trasformazione $P = P(q_1, q_2; t) : \mathbb{R}^2 \times [t_0, +\infty) \supseteq \Omega_P \times [t_0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}^3$ è a sua volta continua con derivata prima continua e la matrice jacobiana

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial q_1} & \frac{\partial x}{\partial q_2} \\ \frac{\partial y}{\partial q_1} & \frac{\partial y}{\partial q_2} \\ \frac{\partial z}{\partial q_1} & \frac{\partial z}{\partial q_2} \end{pmatrix} \quad (5.21)$$

ha rango massimo (cioè 2).

Le due colonne della (5.21) rappresentano i due vettori $\frac{\partial P}{\partial q_1}$ e $\frac{\partial P}{\partial q_2}$ tangenti, rispettivamente, alle linee coordinate $x = x(q_1, \cdot; t)$ e $x = x(\cdot, q_2; t)$, che risultano pertanto linearmente indipendenti. $\frac{\partial P}{\partial q_1}$ e $\frac{\partial P}{\partial q_2}$ possono costituire

⁸Ulisse Dini, matematico e politico italiano (Pisa, 14 novembre 1845 - Pisa, 28 ottobre 1918).

una base locale (in un intorno di P) per il piano tangente alla superficie $f(P; t) = 0$ in P ed all'istante t .

Riprendiamo in considerazione, per questo caso, la II Legge di Newton (5.1), che però va riformulata tenendo conto che il punto P è un punto vincolato che quindi assume la forma

$$m\mathbf{a} = \mathbf{F} + \mathbf{\Phi} , \quad (5.22)$$

che possiamo anche scrivere come

$$m\mathbf{a} - \mathbf{F} = \mathbf{\Phi} , \quad (5.23)$$

dove $\mathbf{\Phi}$ rappresenta la forza (incognita) che il vincolo esercita sul punto P affinché questo si muova sulla superficie stessa.

Proiettiamo la (5.23) lungo le direzioni individuate da $\frac{\partial P}{\partial q_1}$ e $\frac{\partial P}{\partial q_2}$:

$$(m\mathbf{a} - \mathbf{F}) \cdot \frac{\partial P}{\partial q_h} = \mathbf{\Phi} \cdot \frac{\partial P}{\partial q_h} , \quad h = 1, 2 . \quad (5.24)$$

Il primo membro della (5.24), sotto le ipotesi di regolarità formulate per la funzione che, tramite l'equazione (5.19), definisce la superficie, viene trattato esattamente come nel caso del punto libero e dà luogo al binomio di Lagrange (5.14), mentre il secondo membro richiede la formulazione di ipotesi sul comportamento dinamico del vincolo.

Introduciamo qui l'ipotesi di **vincolo liscio**, riprendendo la definizione intuitiva:

- una superficie è un vincolo liscio se la forza di reazione che esercita su un punto materiale che si muove su di essa è sempre normale al piano tangente alla superficie stessa, in ogni suo punto.

Questo significa che

$$\mathbf{\Phi} \cdot \frac{\partial P}{\partial q_h} = 0 , \quad h = 1, 2 . \quad (5.25)$$

Questa ipotesi può essere formulata in modo diverso, ma equivalente, a partire dalla definizione di **velocità virtuale**. Il punto P si muove su una superficie definita dall'equazione (5.19) e parametrizzata localmente dalle coordinate lagrangiane q_1 e q_2 , quindi P è una funzione delle $\mathbf{q} := (q_1, q_2)$ e, esplicitamente, del tempo t . La sua velocità è quindi

$$\mathbf{v} := \frac{dP}{dt} = \sum_{h=1}^2 \frac{\partial P}{\partial q_h} \dot{q}_h + \frac{\partial P}{\partial t} . \quad (5.26)$$

Definiamo velocità virtuale

$$\widehat{\mathbf{v}} := \sum_{h=1}^2 \frac{\partial P}{\partial \dot{q}_h} \dot{q}_h$$

e velocità di trascinamento

$$\mathbf{v}^* := \frac{\partial P}{\partial t}.$$

È immediato vedere che la velocità virtuale è la velocità del punto **sulla superficie**, come se questa fosse istantaneamente ferma, ovvero è un vettore appartenente al piano tangente alla superficie in ogni suo punto e in ogni istante. Viceversa, la velocità di trascinamento è quella parte di velocità del punto che è dovuta interamente al moto, noto, della superficie stessa.

Una definizione alternativa di vincolo liscio, nel caso adesso esaminato di una superficie eventualmente mobile, è formulabile attraverso il **Principio dei lavori virtuali**:

- la potenza virtuale delle reazioni vincolari è nulla durante il moto del punto:

$$\widehat{W} = \Phi \cdot \widehat{\mathbf{v}} = 0,$$

ipotesi equivalente alla (5.25). Quindi, sotto le ipotesi di vincoli olonomi e lisci, si ottengono le equazioni di Eulero-Lagrange per il punto vincolato ad una superficie, nella forma generale

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_h} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_h} = F_{T,h}, \quad h = 1, 2, \quad (5.27)$$

che, introducendo la Lagrangiana, $\mathcal{L} = T - U$, prende la forma

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_h} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_h} = F_{T,h}^{nc}, \quad h = 1, 2. \quad (5.28)$$

Nel caso che la risultante di tutte le forze attive sia ottenibile da un potenziale, prende la forma “conservativa”

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_h} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_h} = 0, \quad h = 1, 2. \quad (5.29)$$

Il punto vincolato ad una linea.

Una curva (o linea) in \mathbb{R}^3 , eventualmente dipendente dal tempo, può essere descritta globalmente da una coppia di superfici che abbiano intersezione non vuota:

$$\begin{cases} f_1(x, y, z; t) = 0 \\ f_2(x, y, z; t) = 0, \end{cases} \quad (5.30)$$

dove $\{x, y, z\} \in \mathbb{D} \subseteq \mathbb{R}^3, t \geq t_0$. Le due funzioni f_1 ed f_2 devono essere continue con derivata prima continua (**curva regolare**) sul loro dominio di definizione e l'intersezione degli insiemi di soluzioni reali delle due equazioni deve essere non vuoto (**vincolo efficace**). Occorre aggiungere un'ipotesi ulteriore per poter parametrizzare la curva e individuare la posizione P del punto per mezzo di una sola coordinata libera (**coordinata lagrangiana**). Le due superfici, infatti, potrebbero avere intersezione non nulla, ma essere tangenti fra loro "da qualche parte": in queste zone (intorni di un punto o regioni finite) non sarebbe definita nessuna curva. La proprietà che garantisce che i vincoli espressi nelle due equazioni di (5.30) siano **indipendenti** è esprimibile imponendo il non parallelismo dei gradienti delle due superfici, ∇f_1 e ∇f_2 , ovvero che la matrice avente come elementi le componenti dei due gradienti

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} & \frac{\partial f_1}{\partial z} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} & \frac{\partial f_2}{\partial z} \end{pmatrix} \quad (5.31)$$

abbia rango massimo (cioè 2).

Per il teorema del Dini esiste una rappresentazione locale parametrica della (5.30) per mezzo di una coordinata q libera di variare in un intervallo aperto. La matrice costituita da una sola riga

$$\left(\frac{\partial x}{\partial q}, \frac{\partial y}{\partial q}, \frac{\partial z}{\partial q} \right) \quad (5.32)$$

ha rango massimo (cioè 1) e quindi il vettore tangente $\frac{dP}{dq} = \left(\frac{\partial x}{\partial q}, \frac{\partial y}{\partial q}, \frac{\partial z}{\partial q} \right)$ alla curva

$$\begin{cases} x = x(q; t) \\ y = y(q; t) \\ z = z(q; t) \end{cases} \quad (5.33)$$

è definito in ogni punto della curva⁹, ad ogni istante t . Come nel caso della superficie, lo spazio \mathbb{R}^3 in cui si muove il punto P è decomposto localmente in due sottospazi lineari: lo spazio tangente alla curva, individuato dal vettore tangente $\frac{dP}{dq}$, di dimensione uno, e lo spazio normale, individuato dai vettori ∇f_1 e ∇f_2 , di dimensione due.

⁹In realtà, sia nel caso della curva che in quello della superficie, la parametrizzazione per mezzo di coordinate lagrangiane (libere) vale in generale solo localmente, ovvero in un intorno aperto (**carta**) della posizione considerata. Questo significa che per ottenere una rappresentazione parametrica globale coincidente con la (5.19) o con la (5.30) occorre via via cambiare parametro costruendo un insieme di carte che ricoprano tutta la superficie o la curva (**atlante**).

Il procedimento per ottenere l'equazione di Eulero-Lagrange è adesso del tutto analogo a quello sviluppato nel caso del punto vincolato ad una superficie. L'equazione di Newton va scritta come la (5.22) o la (5.23), data la presenza del vincolo. Se proiettiamo l'equazione di Newton nella forma (5.22) sulla direzione tangente, otteniamo il binomio di Lagrange, con passaggi del tutto analoghi a quelli effettuati per il punto libero:

$$m\mathbf{a} \cdot \frac{dP}{dq} = \frac{d}{dt} \left(\frac{dT}{d\dot{q}} \right) - \frac{dT}{dq}.$$

Per quanto riguarda il secondo membro, dopo aver definito come componente lagrangiana della risultante delle forze attive la proiezione di \mathbf{F} sulla direzione tangente:

$$\mathbf{F} \cdot \frac{dP}{dq} := F_{\mathcal{T}},$$

introduciamo l'ipotesi di vincolo liscio, ovvero che la reazione vincolare non abbia componenti lungo la direzione tangente alla curva:

$$\Phi \cdot \frac{dP}{dq} = 0$$

Questa ipotesi è esprimibile in modo equivalente per mezzo del Principio dei lavori virtuali:

Principio dei lavori virtuali:

- la potenza virtuale delle reazioni vincolari è nulla durante il moto del punto:

$$\widehat{W} = \Phi \cdot \widehat{\mathbf{v}} = 0,$$

poiché la velocità virtuale del punto

$$\widehat{\mathbf{v}} = \frac{dP}{dq} \dot{q}$$

ha la direzione della tangente alla curva.

Analogamente al caso del punto vincolato ad una superficie, sotto le ipotesi di vincoli olonomi e lisci, si ottengono le equazioni di Eulero-Lagrange per il punto vincolato ad una linea, nella forma generale

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial T}{\partial q} = F_{\mathcal{T}}, \quad (5.34)$$

che, introducendo la Lagrangiana, prende la forma

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} = F_{\mathcal{T}}^{nc}. \quad (5.35)$$

Nel caso che la risultante di tutte le forze attive sia ottenibile da un potenziale, prende la forma “conservativa”

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} = 0. \quad (5.36)$$

Osservazione.

È interessante notare che le ipotesi di regolarità, efficacia ed indipendenza formulate sui vincoli (superficie e linea) portano a cambiamenti di coordinate espressi in (5.20) e (5.33), del tutto analoghi al caso del punto libero, (5.4). Dal punto di vista geometrico i vincoli olonomi permettono quindi una trattazione che comporta semplicemente un cambiamento di coordinate con perdita di gradi di libertà (nei due casi qui studiati da tre a due per la superficie e da tre a uno per la linea). Queste considerazioni valgono inalterate anche per il caso più generale di sistemi materiali.

5.4 Sistemi a vincoli olonomi e lisci.

Prima di affrontare il metodo di Lagrange per la derivazione di equazioni di moto “pure” (cioè senza la presenza delle incognite reazioni vincolari, come avviene nelle equazioni cardinali) occorre una premessa. Le equazioni di Eulero-Lagrange si possono scrivere per sistemi materiali con un numero finito di gradi di libertà, siano essi discreti (punti materiali) o a distribuzione continua di massa (ad esempio sistemi rigidi come sbarre, dischi etc.). La trattazione qui proposta considera i sistemi discreti composti da punti materiali per la loro maggiore semplicità. Poiché le equazioni che ricaveremo coinvolgono essenzialmente due grandezze meccaniche “globali” del sistema, cioè l’energia cinetica e l’energia potenziale delle forze conservative agenti su di esso, entrambe ben definite per ogni tipo di sistema, il passaggio da sistemi di punti a sistemi continui risulta immediato, ancorché sottinteso ¹⁰.

Consideriamo un sistema materiale discreto \mathfrak{M} composto da n punti materiali, $\mathfrak{M} := \{P_i, m_i; i = 1, \dots, n.\}$ Se i punti sono liberi il sistema ha $3n$ gradi di libertà ed occorrono $3n$ coordinate per individuarne la configurazione. Possiamo però pensare in generale ad un sistema di punti materiali, non necessariamente tutti liberi di muoversi in \mathbb{R}^3 , ma la cui configurazione

¹⁰Un metodo più generale e rigoroso, ma indubbiamente più astratto, di ricavare le equazioni di Eulero-Lagrange si basa direttamente sulla definizione di funzione lagrangiana e sul principio di Hamilton, limitando quindi la validità della derivazione ai sistemi conservativi.

è individuata da un numero di coordinate $N \leq 3n$, ovvero che la **configurazione** del sistema è $\mathcal{C} := \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_N; t\}$, dove le ξ_j , $j = 1, \dots, N$ costituiscono un generico sistema di coordinate e la presenza esplicita del tempo è dovuta alla eventuale azione di vincoli esplicitamente dipendenti dal tempo.

Per ogni $t \in [t_0, T)$ fissato, con $T \leq +\infty$, definiamo **spazio delle configurazioni** l'insieme $\mathfrak{C}(t) \subseteq \mathbb{R}^N$ di tutti i valori raggiungibili da \mathcal{C} , compatibilmente con i vincoli imposti al sistema. Se il sistema è composto da n punti liberi, lo spazio delle configurazioni è lo spazio vettoriale \mathbb{R}^{3n} , ma in generale lo spazio delle configurazioni non sarà uno spazio vettoriale, ma piuttosto una varietà differenziale ¹¹.

L'equazione di Newton per ciascuno dei punti del sistema si scrive quindi

$$m_i \mathbf{a}_i = \mathbf{F}_i + \mathbf{\Phi}_i, \quad i = 1, \dots, n, \quad (5.37)$$

dove m_i è la massa del punto i -esimo, \mathbf{a}_i la sua accelerazione, \mathbf{F}_i la risultante di tutte le forze attive agenti sul punto e $\mathbf{\Phi}_i$ la risultante delle reazioni vincolari.

Possiamo vincolare i punti del sistema \mathfrak{M} , limitando le configurazioni assumibili da esso. I vincoli che consideriamo sono **olonomi**, esprimibili cioè mediante equazioni che coinvolgono funzioni delle sole coordinate che descrivono il sistema, o ad esse riconducibili ¹². Considereremo quindi vincoli espressi da equazioni del tipo

$$f_k(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_N; t) = 0, \quad k = 1, 2, \dots, m \leq N. \quad (5.38)$$

Se le funzioni f_k dipendono esplicitamente dal tempo, diremo che i vincoli sono **mobili** o **scleronomi**, altrimenti si parlerà di vincoli **fissi** o **reonomi**. Introduciamo adesso le ipotesi sulle (5.38) che completano la caratterizzazione geometrica dei vincoli:

- **Regolarità:** le f_k sono funzioni scalari della configurazione \mathcal{C} di \mathfrak{M} ed eventualmente del tempo, da $\Omega_N \times [t_o, T)$, dove $T \leq +\infty$ e Ω_N è un "rettangolo" aperto di \mathbb{R}^N . Considereremo funzioni continue con derivate continue rispetto a tutti gli argomenti: $f_k \in C^1(\Omega_N \times [t_o, T))$.

¹¹Il concetto di varietà differenziale generalizza ad una dimensione qualsiasi, ma finita, la definizione di superficie regolare (dove quindi in ogni punto resta definita la normale ed il piano tangente) in \mathbb{R}^3 .

¹²Alcuni vincoli sulle velocità, come i vincoli di puro rotolamento - i.e. velocità del punto di contatto nulla - di una ruota o di una sfera su di una superficie non sono olonomi e si dicono pertanto anolonomi, mentre il rotolamento su una linea fissata - un binario - dà luogo ad un'equazione integrabile e costituisce quindi un vincolo olonomo.

- **Efficacia:** gli insiemi delle soluzioni reali delle equazioni (5.38) devono essere non vuoti $\forall k = 1, \dots, m$ e la loro intersezione non vuota. Quindi, siano S_1, \dots, S_m gli insiemi, costituiti dalle configurazioni che risolvono le $f_1 = 0, \dots, f_m = 0$, ovvero le loro soluzioni reali, considereremo vincoli per cui $S_k \neq \emptyset, \forall k = 1, \dots, m$ e $\bigcap_{k=1}^m S_k \neq \emptyset$.
- **Indipendenza:** i vincoli devono essere indipendenti, cioè ogni equazione deve ammettere soluzioni reali (e quindi configurazioni) compatibili con le altre (vedi **Efficacia**), ma differenti (indipendenti) dalle altre. Dal punto di vista matematico questo è garantito se la matrice jacobiana associata alle (5.38) ha rango massimo. Posto $\mathcal{F} := (f_1, \dots, f_m)^T$, avremo che

$$J_{\mathcal{F}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial \xi_1} & \frac{\partial f_1}{\partial \xi_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial \xi_N} \\ \frac{\partial f_2}{\partial \xi_1} & \frac{\partial f_2}{\partial \xi_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial \xi_N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_m}{\partial \xi_1} & \frac{\partial f_m}{\partial \xi_2} & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial \xi_N} \end{pmatrix} \quad (5.39)$$

deve avere rango massimo e, quindi, rango uguale a m , poiché $m < N$.

Questo significa che le m righe della (5.39) sono linearmente indipendenti e, quindi, gli m vettori

$$\left(\frac{\partial f_k}{\partial \xi_1}, \frac{\partial f_k}{\partial \xi_2}, \dots, \frac{\partial f_k}{\partial \xi_N} \right)^T, \quad k = 1, \dots, m,$$

in quanto linearmente indipendenti, possono costituire una base per un sottospazio lineare a dimensione m di \mathbb{R}^N , che sarà indicato come lo **spazio normale** allo spazio delle configurazioni, localmente in \mathcal{C} . Gli m vettori linearmente indipendenti individuati dalla (5.39) si possono rappresentare con il simbolismo più sintetico del gradiente

$$\nabla_{\mathcal{C}} \mathcal{F} := (\nabla_{\mathcal{C}} f_1, \nabla_{\mathcal{C}} f_2, \dots, \nabla_{\mathcal{C}} f_m)^T, \quad (5.40)$$

dove $\mathcal{C} := (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_N)^T$ ed ognuno dei gradienti $\nabla_{\mathcal{C}} f_k$, $k = 1, 2, \dots, m$ è un vettore di N componenti.

Per il teorema del Dini sulle funzioni definite implicitamente da equazioni, le equazioni vincolari (5.38) che coinvolgono funzioni da $\mathbb{R}^N \times [t_0, T]$ in \mathbb{R}^m , sotto l'ipotesi che la matrice jacobiana (5.39) abbia rango massimo, risultano parametrizzabili. Esistono cioè $\ell = N - m$ coordinate, $q_1, q_2, \dots, q_{\ell}$

“libere”, nel senso che sono indipendenti l’una dall’altra e che ciascuna di esse varia in un intervallo aperto I_h , $h = 1, 2, \dots, \ell$. Tali coordinate prendono il nome di **coordinate lagrangiane**. Le coordinate lagrangiane parametrizzano le equazioni vincolari (5.38) e sono tali che la matrice di cambiamento di coordinate

$$J_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \xi_1}{\partial q_1} & \frac{\partial \xi_1}{\partial q_2} & \dots & \frac{\partial \xi_1}{\partial q_\ell} \\ \frac{\partial \xi_2}{\partial q_1} & \frac{\partial \xi_2}{\partial q_2} & \dots & \frac{\partial \xi_2}{\partial q_\ell} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial \xi_N}{\partial q_1} & \frac{\partial \xi_N}{\partial q_2} & \dots & \frac{\partial \xi_N}{\partial q_\ell} \end{pmatrix} \quad (5.41)$$

dalle ξ_j , $j = 1, \dots, N$, vincolate per mezzo delle (5.38), alle q_h , $h = 1, \dots, \ell$, libere ed indipendenti, ha rango massimo, ovvero $\ell = N - m$. Le colonne della matrice (5.41) non sono altro che i vettori (di dimensione N)

$$\frac{\partial \mathcal{C}}{\partial q_h}, \quad h = 1, \dots, \ell,$$

che sono linearmente indipendenti e generano quindi un sottospazio lineare di dimensione ℓ , localmente nella configurazione \mathcal{C} .

Quindi, in ogni \mathcal{C} compatibile con i vincoli (5.38) e $\forall t \in [t_0, T)$, $T \leq +\infty$ lo spazio delle configurazioni, inizialmente di dimensione N , è separabile in due sottospazi lineari: lo spazio generato dai vettori $\frac{\partial \mathcal{C}}{\partial q_h}$, di dimensione ℓ , detto **spazio tangente** e lo spazio generato dai vettori $\nabla_{\mathcal{C}} f_k$, di dimensione m , detto **spazio normale**. La configurazione \mathcal{C} , con l’introduzione delle coordinate lagrangiane può quindi essere descritta tramite esse,

$$\mathcal{C} = \mathcal{C}(\mathbf{q}; t), \quad \mathbf{q} := (q_1, q_2, \dots, q_\ell),$$

come un punto libero che si muove su di una varietà ℓ -dimensionale.

Le ℓ coordinate lagrangiane \mathbf{q} parametrizzano dunque lo spazio delle configurazioni \mathfrak{C} , che è una varietà ℓ -dimensionale, ed individuano ogni suo punto \mathcal{C} , ad ogni istante $t \in [t_0, T)$.

Esempi:

- Siano P_1, P_2, \dots, P_n punti liberi: lo spazio delle configurazioni è \mathbb{R}^{3n} .
- Pendolo semplice: lo spazio delle configurazioni è la circonferenza $S^1 \in \mathbb{R}^2$.

- Pendolo sferico: lo spazio delle configurazioni è la superficie sferica $S^2 \in \mathbb{R}^3$.
- Pendolo doppio: lo spazio delle configurazioni è il toro $\mathcal{T} = S^1 \times S^1 \in \mathbb{R}^3$.
- Asta rigida nel piano: lo spazio delle configurazioni è $\mathbb{R}^2 \times S^1 \in \mathbb{R}^3$
- Asta rigida nello spazio: lo spazio delle configurazioni è $\mathbb{R}^3 \times S^2 \in \mathbb{R}^6$

Velocità virtuali: estendiamo la definizione di velocità virtuale ai sistemi di punti. Dato che ogni punto del sistema dipende dalle coordinate lagrangiane ed, eventualmente, dal tempo (nel caso di vincoli mobili), i.e. $P_i = P_i(\mathbf{q}, t)$, avremo l'espressione della velocità nella formulazione lagrangiana

$$\mathbf{v}_i := \frac{dP_i}{dt} = \sum_{h=1}^{\ell} \frac{\partial P_i}{\partial q_h} \dot{q}_h + \frac{\partial P_i}{\partial t}. \quad (5.42)$$

Definiamo velocità virtuale

$$\hat{\mathbf{v}}_i := \sum_{h=1}^{\ell} \frac{\partial P_i}{\partial q_h} \dot{q}_h \quad (5.43)$$

e velocità di trascinamento (dovuta dal moto, noto in funzione del tempo, dei vincoli mobili)

$$\mathbf{v}_i^* := \frac{\partial P_i}{\partial t}. \quad (5.44)$$

Se consideriamo il sistema di punti nel suo complesso, rappresentato dalla configurazione $\mathcal{C} = \mathcal{C}(\mathbf{q}, t)$, definiamo corrispondentemente l'**atto di moto**

$$\mathcal{V} := \frac{d\mathcal{C}}{dt} = \sum_{h=1}^{\ell} \frac{\partial \mathcal{C}}{\partial q_h} \dot{q}_h + \frac{\partial \mathcal{C}}{\partial t}, \quad (5.45)$$

con le ovvie estensioni di definizione di **atto di moto virtuale**

$$\hat{\mathcal{V}} := \sum_{h=1}^{\ell} \frac{\partial \mathcal{C}}{\partial q_h} \dot{q}_h \quad (5.46)$$

ed **atto di moto di trascinamento**

$$\mathcal{V}^* := \frac{\partial \mathcal{C}}{\partial t}. \quad (5.47)$$

Come è evidente dalla (5.46) l'atto di moto virtuale del sistema appartiene allo spazio tangente allo spazio delle configurazioni.

Definiamo **spazio delle fasi** l'insieme di tutti i valori raggiungibili dalla coppia \mathcal{C}, \mathcal{V} , compatibilmente con i vincoli imposti al sistema.

Il moto del sistema \mathfrak{M} può essere rappresentato da un punto nello spazio delle fasi, oppure dal punto \mathcal{C} che si muove nello spazio delle configurazioni con atto di moto \mathcal{V} .

A partire dalle grandezze fisiche definite in \mathbb{R}^3 introduciamo le analoghe grandezze in \mathbb{R}^{3n} :

$$\begin{aligned}\mathbb{Q} &:= (m_1 \mathbf{v}_1, m_2 \mathbf{v}_2, \dots, m_n \mathbf{v}_n)^T, \\ \mathbb{F} &:= (\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \dots, \mathbf{F}_n)^T, \\ \mathfrak{F} &:= (\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_n)^T,\end{aligned}\tag{5.48}$$

dove \mathbb{Q} rappresenta la quantità di moto del sistema in \mathbb{R}^{3n} , \mathbb{F} e \mathfrak{F} rispettivamente le forze attive e le reazioni vincolari.

Le equazioni di moto del sistema (5.37) sono dunque riassumibili da

$$\dot{\mathbb{Q}} = \mathbb{F} + \mathfrak{F}.\tag{5.49}$$

Analogamente a quanto abbiamo fatto per il punto (sia libero che vincolato), proiettiamo la (5.49) sullo spazio tangente:

$$\left(\dot{\mathbb{Q}} - \mathbb{F}\right) \cdot \frac{\partial \mathcal{C}}{\partial q_h} = \mathfrak{F} \cdot \frac{\partial \mathcal{C}}{\partial q_h}, \quad h = 1, 2, \dots, \ell.\tag{5.50}$$

Ritornando alla rappresentazione in termini dei vettori di \mathbb{R}^3 , la (5.50) prende la forma seguente:

$$\sum_{i=1}^n (m_i \mathbf{a}_i - \mathbf{F}_i) \cdot \frac{\partial P_i}{\partial q_h} = \sum_{i=1}^n \Phi_i \cdot \frac{\partial P_i}{\partial q_h}, \quad h = 1, 2, \dots, \ell.\tag{5.51}$$

Analogamente a quanto calcolato esplicitamente nel paragrafo 5.2, dalla definizione di energia cinetica del sistema (4.24) si ottiene con identici passaggi il binomio di Lagrange:

$$\dot{\mathbb{Q}} \cdot \frac{\partial \mathcal{C}}{\partial q_h} = \sum_{i=1}^n \left(m_i \mathbf{a}_i \cdot \frac{\partial P_i}{\partial q_h} \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_h} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_h}.\tag{5.52}$$

Il termine

$$\mathbb{F} \cdot \frac{\partial \mathcal{C}}{\partial q_h} \equiv \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i \cdot \frac{\partial P_i}{\partial q_h}\tag{5.53}$$

viene definito come componente lagrangiana delle forze e rappresentato con il simbolo $F_{\mathcal{T},h}$. La componente lagrangiana delle forze rappresenta la proiezione delle forze attive sullo spazio tangente allo spazio delle configurazioni, localmente nel punto \mathcal{C} ed all'istante t . Nel caso di forze "conservative" (nel senso di ricavabili da un potenziale $V = V(\mathcal{C}, t)$, anche, eventualmente, dipendente dal tempo), come già visto nei paragrafi 5.2 e 5.3, possiamo scrivere

$$\mathbb{F} \cdot \frac{\partial \mathcal{C}}{\partial q_h} = \nabla_{\mathcal{C}} V \cdot \frac{\partial \mathcal{C}}{\partial q_h} = \sum_{i=1}^n \nabla_{P_i} V \cdot \frac{\partial P_i}{\partial q_h} = \frac{\partial V}{\partial q_h} \quad (5.54)$$

Ricordando la definizione di energia potenziale U del sistema (4.38) e la definizione di Lagrangiana, che estendiamo dal caso del punto materiale ai sistemi materiali con un numero finito di gradi di libertà:

$$\mathcal{L} := T + V = T - U, \quad (5.55)$$

otteniamo, che il primo membro di (5.50) e (5.51) può essere scritto per mezzo della Lagrangiana come

$$\left(\dot{\mathbb{Q}} - \mathbb{F} \right) \cdot \frac{\partial \mathcal{C}}{\partial q_h} \equiv \sum_{i=1}^n (m_i \mathbf{a}_i - \mathbf{F}_i) \cdot \frac{\partial P_i}{\partial q_h} \equiv \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_h} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_h} - F_{\mathcal{T},h}^{nc} \quad (5.56)$$

dove $F_{\mathcal{T},h}^{nc}$ rappresenta la componente lagrangiana delle forze attive "non conservative", nel senso che non sono deducibili da un potenziale.

Consideriamo adesso il secondo membro della (5.50) o, equivalentemente, della (5.51). Esso contiene le incognite reazioni vincolari e su di esse (dopo l'ipotesi di vincoli olonomi, che caratterizza l'aspetto geometrico del vincolo) occorre introdurre delle ipotesi sul comportamento meccanico.

Principio dei lavori virtuali.

Nel caso di sistemi materiali vincolati la definizione elementare di vincolo liscio (reazione ortogonale al vincolo) non è applicabile. Pensiamo ad esempio al pendolo ad asta rigida: cosa vuol dire che la cerniera cilindrica a cui vincoliamo un estremo dell'asta è un vincolo liscio? A quale superficie o linea dovrebbe essere ortogonale la reazione vincolare? Il concetto di vincolo liscio viene recuperato per mezzo di una diversa e più generale caratterizzazione: la presenza di vincoli che limitano le configurazioni possibili di un sistema materiale non deve modificare l'energia del sistema stesso. In altre parole, il vincolo non deve fare lavoro per mezzo delle reazioni che esercita, a meno che

a meno che non si tratti di un vincolo mobile, nel senso che il vincolo si muove con legge nota nel tempo. L'esempio più semplice è quello del piano di un ascensore o di una piattaforma mobile. Se tale piano è liscio, la reazione

vincolare da esso esercitata deve essere ortogonale al piano stesso e quindi non compie lavoro quando un oggetto viene spostato sul piano. Ma, quando l'ascensore si muove, il lavoro corrispondente è compiuto dalle stesse reazioni vincolari, a spese dell'energia fornita dal motore. Non possiamo quindi imporre alle reazioni vincolari di non compiere mai lavoro, se vogliamo includere nella nostra teoria anche i vincoli mobili.

La definizione di vincolo liscio tiene quindi conto di questo aspetto: le reazioni vincolari non devono compiere lavoro quando il punto rappresentativo \mathcal{C} si muove nello spazio delle configurazioni, considerando lo spazio stesso "fissato" nel tempo. Esprimendo meglio e più rigorosamente il concetto, questo corrisponde a imporre che la potenza virtuale delle reazioni vincolari sia nulla ad ogni istante, i.e.

$$\mathfrak{F} \cdot \widehat{\mathcal{V}} \equiv \sum_{i=1}^n \Phi_i \cdot \widehat{\mathbf{v}}_i = 0, \quad \forall t \in [t_0, T). \quad (5.57)$$

L'ipotesi di **vincoli lisci** si può formulare in modo equivalente affermando che il vettore delle reazioni vincolari \mathfrak{F} di dimensione $3n$, non deve avere alcuna componente nello spazio tangente allo spazio delle configurazioni, $\forall \mathcal{C} \in \mathfrak{C}$ e $\forall t \in [t_0, T)$, e quindi deve appartenere allo spazio normale allo spazio delle configurazioni.

Come conseguenza delle ipotesi di **vincoli olonomi e lisci** avremo che il secondo membro delle (5.50) e (5.51) è nullo e per la (5.56) otteniamo la forma generale per le equazioni di Eulero-Lagrange (dette anche equazioni di Lagrange di II specie):

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_h} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_h} = F_{\mathcal{T},h}^{nc}, \quad h = 1, \dots, \ell. \quad (5.58)$$

La (5.58) può ovviamente essere scritta senza introdurre la Lagrangiana, scrivendo il binomio di Lagrange nel membro a sinistra dell'equazione e ponendo a destra tutte le componenti lagrangiane delle forze, siano esse conservative o no:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_h} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_h} = F_{\mathcal{T},h}, \quad h = 1, \dots, \ell, \quad (5.59)$$

dove

$$F_{\mathcal{T},h} := F_{\mathcal{T},h}^c + F_{\mathcal{T},h}^{nc} \quad \text{e} \quad F_{\mathcal{T},h}^c = -\frac{\partial U}{\partial q_h}.$$

La (5.58) prende la forma

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_h} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_h} = 0, \quad h = 1, \dots, \ell. \quad (5.60)$$

nel caso che tutte le forze agenti sul sistema \mathfrak{M} siano “conservative”, nel senso di ottenibili come gradienti di un potenziale.

Esempio: per chiarire la questione della conservatività, consideriamo il semplice sistema illustrato in Fig. 5.1. Una sbarra omogenea, di massa M e lunghezza l ruota in un piano orizzontale attorno al suo estremo O , soggetta ad una forza di modulo costante F , applicata al secondo estremo A e mantenuta sempre ortogonale alla direzione della sbarra stessa.

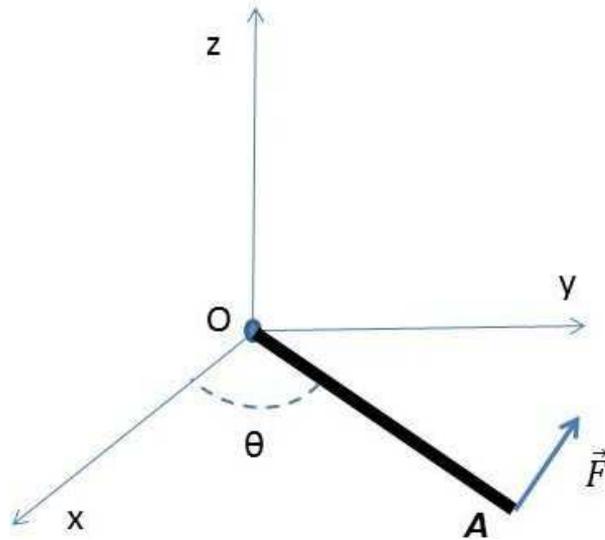


Figura 5.1

Il modello simula una situazione molto classica ¹³ dove è evidente che la forza \vec{F} compie lavoro e che, chiuso il giro (per $\theta = 2\pi$), il lavoro compiuto è $2\pi lF$. La forza \vec{F} non è dunque conservativa, tuttavia si può introdurre un potenziale V da cui ricavare la componente lagrangiana della forza (che risulta essere il momento di \vec{F} rispetto ad O):

$$F_{\mathcal{T}} = \vec{F} \cdot \frac{dP}{d\theta} = Fl .$$

Il potenziale risulta quindi

$$V(\theta) = Fl\theta \quad \text{e la Lagrangiana} \quad \mathcal{L} = \frac{1}{6}Ml^2\dot{\theta}^2 + Fl\theta .$$

e l'equazione di Eulero-Lagrange

$$\frac{1}{3}Ml^2\ddot{\theta} - Fl = 0$$

¹³L'asino che aziona la semplice macchina che tira su il secchio d'acqua dal pozzo, lo schiavo che fa girare la macina, etc...

che altro non è se non la II equazione cardinale del sistema scritta rispetto al polo O .

5.5 Forma lagrangiana dell'energia cinetica

In questo paragrafo studiamo la dipendenza dell'energia cinetica dalle coordinate lagrangiane e dalle loro derivate prime rispetto al tempo. Data la forma (5.42) della velocità di un punto del sistema \mathfrak{M} , l'energia cinetica diviene

$$T := \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i v_i^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i \left(\sum_{h=1}^{\ell} \frac{\partial P_i}{\partial q_h} \dot{q}_h + \frac{\partial P_i}{\partial t} \right) \cdot \left(\sum_{k=1}^{\ell} \frac{\partial P_i}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial P_i}{\partial t} \right). \quad (5.61)$$

Sviluppando l'espressione al secondo membro della (5.61), si ottiene la forma lagrangiana dell'energia cinetica, che può essere scomposta in tre termini

$$T = T_0 + T_1 + T_2 \quad (5.62)$$

dove

$$T_0 := \frac{1}{2} c(\mathbf{q}, t),$$

$$T_1 := \sum_{h=1}^{\ell} b_h(\mathbf{q}, t) \dot{q}_h, \quad (5.63)$$

$$T_2 := \frac{1}{2} \sum_{h,k=1}^{\ell} a_{h,k}(\mathbf{q}, t) \dot{q}_h \dot{q}_k$$

e

$$a_{h,k}(\mathbf{q}, t) := \sum_{i=1}^n m_i \left(\frac{\partial P_i}{\partial q_h} \cdot \frac{\partial P_i}{\partial q_k} \right),$$

$$b_h(\mathbf{q}, t) := \sum_{i=1}^n m_i \left(\frac{\partial P_i}{\partial q_h} \cdot \frac{\partial P_i}{\partial t} \right), \quad (5.64)$$

$$c(\mathbf{q}, t) := \sum_{i=1}^n m_i \left(\frac{\partial P_i}{\partial t} \right)^2.$$

Le (5.62), (5.63) e (5.64) ci mostrano che l'energia cinetica dipende dalle velocità lagrangiane $\dot{\mathbf{q}}$ solo in maniera esplicita, attraverso un termine bilineare, T_2 , ed uno lineare, T_1 .

Se riprendiamo le equazioni di Eulero-Lagrange, nella forma generale (5.59) vediamo che il termine $F_{\mathcal{T},h}$ al secondo membro dipende generalmente dalle \mathbf{q} , dalle $\dot{\mathbf{q}}$ e dal tempo t .

Il termine $\frac{\partial T}{\partial q_h}$ risulta avere lo stesso tipo di dipendenza, infatti:

$$\frac{\partial T}{\partial q_h} = \frac{1}{2} \sum_{h,k=1}^{\ell} \frac{\partial a_{h,k}}{\partial q_h}(\mathbf{q}, t) \dot{q}_h \dot{q}_k + \sum_{h=1}^{\ell} \frac{\partial b_h}{\partial q_h}(\mathbf{q}, t) \dot{q}_h + \frac{1}{2} \frac{\partial c}{\partial q_h}(\mathbf{q}, t) := \mathcal{F}_{1,h}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t). \quad (5.65)$$

Per quanto riguarda il termine $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial q_h} \right)$ avremo:

$$\frac{\partial T_0}{\partial q_h} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T_0}{\partial q_h} \right) = 0;$$

$$\frac{\partial T_1}{\partial \dot{q}_h} = b_h(\mathbf{q}, t) \Rightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T_1}{\partial \dot{q}_h} \right) = \frac{d}{dt} b_h(\mathbf{q}, t) := \mathcal{F}_{2,h}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t);$$

$$\frac{\partial T_2}{\partial \dot{q}_h} = \sum_{k=1}^{\ell} a_{h,k}(\mathbf{q}, t) \dot{q}_k \Rightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T_2}{\partial \dot{q}_h} \right) =$$

$$\sum_{k=1}^{\ell} a_{h,k}(\mathbf{q}, t) \ddot{q}_k + \sum_{k=1}^{\ell} \frac{d}{dt} a_{h,k}(\mathbf{q}, t) \dot{q}_k := \sum_{k=1}^{\ell} a_{h,k}(\mathbf{q}, t) \ddot{q}_k + \mathcal{F}_{3,h}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t).$$

Osserviamo che il termine T_2 dell'energia cinetica, quadratico nelle $\dot{\mathbf{q}}$, è sempre diverso da 0 se una qualche \dot{q}_h , $h = 1, \dots, \ell$, è diversa da 0. Al contrario i termini T_0 e T_1 sono nulli se i vincoli sono fissi ¹⁴ Quindi T_2 è sempre presente nei sistemi materiali a vincoli olonomi che abbiano un qualche grado di libertà. Come è evidente dalla definizione di velocità virtuale (5.43) e dalle definizioni (5.61), (5.63) e (5.64), T_2 rappresenta l'energia cinetica virtuale del sistema materiale, che coincide con quella effettiva nel caso di vincoli fissi. Con riferimento alla prima delle (5.63), osserviamo che i coefficienti $a_{h,k}$ coincidono con gli elementi della matrice hessiana dell'energia cinetica rispetto alle $\dot{\mathbf{q}}$:

$$a_{h,k} \equiv \frac{\partial^2 T_2}{\partial \dot{q}_h \partial \dot{q}_k} \equiv \frac{\partial^2 T}{\partial \dot{q}_h \partial \dot{q}_k} \quad (5.66)$$

dove la seconda identità è giustificata dal fatto che i termini T_0 e T_1 dipendono al più linearmente dalle $\dot{\mathbf{q}}$ e quindi è nullo il loro contributo all'Hessiano.

¹⁴Si intende per vincolo fisso il vincolo espresso da un'equazione dove non appare una dipendenza esplicita dal tempo, ovvero che il vincolo non si muova con una legge nota nel tempo.

la matrice inversa $\mathcal{H}_{T,\dot{\mathbf{q}}}^{-1}$, che, applicata alla (5.69) riconduce le equazioni di Eulero-Lagrange alla loro forma normale:

$$\ddot{\mathbf{q}} = \mathcal{H}_{T,\dot{\mathbf{q}}}^{-1} \mathcal{F}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t). \quad (5.70)$$

Ricordiamo che la forma normale ¹⁶ di equazioni o sistemi di equazioni differenziali ordinarie è una delle ipotesi sotto le quali vale il teorema di esistenza ed unicità locale per la soluzione del problema di Cauchy ¹⁷ o Problema a Valori Iniziali (PVI). L'esistenza ed unicità locale per il PVI è poi garantita se il secondo membro della (5.70) è localmente lipschitziano ¹⁸ rispetto alle \mathbf{q} e alle $\dot{\mathbf{q}}$ ed almeno continuo rispetto al tempo t .

5.6 Statica dei sistemi olonomi

Cercare soluzioni di equilibrio per le equazioni di Eulero-Lagrange significa cercare configurazioni caratterizzate da coordinate lagrangiane costanti nel tempo e, di conseguenza, con derivate rispetto al tempo nulle. Se indichiamo con $\Xi = (\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ il punto rappresentativo del sistema nello spazio delle fasi, avremo che le soluzioni di equilibrio (o stazionarie) sono del tipo:

$$\Xi_e = (\mathbf{q}_e, \mathbf{0}).$$

È ovvio che, se l'osservatore del moto vede un sistema costretto a muoversi anche per l'azione di vincoli mobili con legge nota, vincoli, cioè, del tipo

$$f_k(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_N; t) = 0, \quad k = 1, 2, \dots, m.$$

non si avranno, in generale, configurazioni di equilibrio rispetto all'osservatore considerato, ma piuttosto configurazioni di equilibrio relativo rispetto al vincolo (o ai vincoli) mobili. Esempio banale può essere il problema dell'equilibrio di un pendolo su una piattaforma mobile: se la piattaforma si muove non c'è nessuna soluzione di equilibrio per l'osservatore solidale con la Terra, mentre il pendolo può avere configurazione costante rispetto alla piattaforma stessa. Naturalmente l'energia cinetica e le forze in gioco cambiano se si cambia osservatore e se quest'ultimo si può considerare approssimativamente inerziale (quello solidale con la Terra) o no (quello solidale con la piattaforma mobile). Escluderemo quindi dalla trattazione della Statica dei sistemi olonomi il caso di vincoli e forze esplicitamente dipendenti dal tempo. In questo

¹⁶Un'equazione o un sistema di equazioni differenziali ordinarie si dice in forma normale quando sono esplicitati o esplicitabili rispetto alla derivata di ordine massimo.

¹⁷Augustin-Louis Cauchy, matematico e ingegnere francese (Parigi, 21 agosto 1789 - Sceaux, 23 maggio 1857).

¹⁸Rudolph Otto Sigismund Lipschitz, matematico tedesco (Königsberg, 14 maggio 1832 - Bonn, 7 ottobre 1903).

caso l'energia cinetica del sistema si riduce all'energia cinetica virtuale T_2 , che, nelle soluzioni di equilibrio, è identicamente nulla. Le configurazioni di equilibrio corrispondono quindi alle soluzioni delle equazioni di Eulero-Lagrange (che possiamo considerare nelle forme (5.58), (5.59) o (5.60)) per le quali $T \equiv T_2 = 0$. La (5.59) diviene

$$F_{\mathcal{T},h} = 0, \quad h = 1, \dots, \ell. \quad (5.71)$$

Quindi, in una configurazione di equilibrio, devono essere nulle tutte le componenti lagrangiane delle forze. Se le forze sono tutte ricavabili da un potenziale V , la (5.72) si traduce in

$$\frac{\partial V}{\partial q_h} = 0, \quad h = 1, \dots, \ell, \quad (5.72)$$

ovvero, le configurazioni di equilibrio coincidono con i punti di stazionarietà del potenziale totale V e, quindi, anche dell'energia potenziale U .

Enunciamo e dimostriamo adesso il teorema di Lagrange-Dirichlet¹⁹, che fornisce una condizione sufficiente per la stabilità (secondo Liapunov²⁰) della soluzione di equilibrio \mathbf{x}_e . Abbiamo visto che le equazioni di Eulero-Lagrange possono essere sempre riportate alla forma normale (5.70), che, ridefinendo le ℓ $\dot{\mathbf{q}}$ come nuove variabili:

$$\dot{q}_h := \eta_h, \quad \dots h = 1, 2, \dots, \ell,$$

trasforma le ℓ equazioni differenziali del secondo ordine (5.70) per le variabili \mathbf{q} , formulate quindi nello spazio delle configurazioni, in 2ℓ equazioni del primo ordine per le variabili \mathbf{q} e η nello spazio delle fasi. Indicando con $\Xi = (\mathbf{q}, \eta)$ le (5.70) possono essere riscritte come

$$\dot{\Xi} = \mathbb{F}(\Xi), \quad (5.73)$$

dove \mathbb{F} è una funzione definita su un aperto in $\mathbb{R}^{2\ell}$ con immagine in $\mathbb{R}^{2\ell}$. La stabilità di una soluzione di equilibrio $\Xi_e \equiv (\mathbf{q}_e, \mathbf{0})$ della (5.73) è garantita dal seguente

Teorema di Lagrange-Dirichlet 5.6.1 *Sia \mathfrak{M} un sistema materiale soggetto a vincoli olonomi, lisci e fissi, la cui configurazione è individuata da ℓ coordinate lagrangiane. Indichiamo con E la sua energia meccanica totale*

¹⁹Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet, matematico tedesco (Düren, 13 febbraio 1805 - Göttingen, 5 maggio 1859).

²⁰Aleksandr Mijilovich Liapunov, matematico e fisico russo (Yaroslavl, 25 maggio 1857 - Odessa, 3 novembre 1918).

e ipotizziamo che su \mathfrak{M} agiscano solo forze conservative e, eventualmente, dissipative, tali che, E sia non crescente durante il moto:

$$\frac{dE}{dt} \leq 0.$$

Allora, se $\Xi_e \equiv (\mathbf{q}_e, \mathbf{0})$ è una soluzione di equilibrio per la (5.73) e l'energia potenziale U ammette un minimo relativo in \mathbf{q}_e , \mathbf{q}_e rappresenta una configurazione di equilibrio stabile per il sistema \mathfrak{M} .

Prova: dimostriamo il teorema utilizzando il criterio della funzione di Liapunov (Appendice 2). Scegliamo come funzione di Liapunov l'energia meccanica totale:

$$\Lambda(\Xi) = T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + U(\mathbf{q}) - U_e,$$

dove $U_e := U(\mathbf{q}_e)$ è il valore dell'energia potenziale nella configurazione di equilibrio. Con questa scelta per Λ e con l'ipotesi che U ammetta un minimo relativo in \mathbf{q}_e , tutte le condizioni del Teorema 5.9.1 sono soddisfatte:

- per le proprietà di regolarità di T ed U (l'energia cinetica è una funzione quadratica delle $\dot{\mathbf{q}}$ e le forze agenti sono almeno continue nei loro argomenti), $\Lambda(\Xi)$ è almeno continua con derivata prima continua in un intorno di $\Xi_e \equiv (\mathbf{q}_e, \mathbf{0})$;
- $\Lambda(\Xi_e) = 0$. Infatti $T(\mathbf{q}_e, \mathbf{0}) = 0$ e $U(\mathbf{q}_e) = U_e$;
- $\Lambda(\Xi) > 0$ in un intorno di Ξ_e . Infatti, in ogni intorno di $(\mathbf{q}_e, \mathbf{0})$ $T \geq 0$ e $U - U_e > 0$, per l'ipotesi che U abbia un minimo relativo in \mathbf{q}_e ;
- $\frac{d\Lambda}{dt} = \frac{dE}{dt} \leq 0$ per l'ipotesi sulle forze agenti.

Il teorema è così dimostrato. ■

5.7 Integrali primi delle equazioni di Eulero-Lagrange

Le equazioni di Eulero-Lagrange, come abbiamo visto nei paragrafi 5.4 e 5.5, costituiscono un sistema di equazioni differenziali ordinarie del II ordine. In generale non si presentano in forma normale, ma abbiamo provato che possono essere sempre riportate a tale forma e che soddisfano le altre condizioni che assicurano esistenza ed unicità locali della soluzione del PVI. Sotto ipotesi più forti (limitatezza o sublinearità) sulle forze agenti, è garantita anche l'esistenza ed unicità globale della soluzione. Queste buone proprietà non assicurano però che tale soluzione sia facilmente calcolabile. Le equazioni

sono in generale non lineari ed accoppiate fra loro per cui le soluzioni non sono in generale ottenibili per via analitica, ma piuttosto dall'utilizzazione di opportuni metodi numerici. È quindi di estremo interesse studiare la possibilità di ottenere degli integrali primi per le equazioni di Eulero-Lagrange. Un integrale primo è un'equazione che si ottiene da una prima integrazione delle equazioni di Eulero-Lagrange e che coinvolge al più le derivate prime delle incognite \mathbf{q} . Nel caso delle equazioni di Eulero-Lagrange si possono ottenere tutti gli integrali primi che corrispondono a conservazioni di grandezze fisiche. Consideriamo quindi la forma "conservativa" delle equazioni, (5.60). È evidente che, se per qualche valore dell'indice h , diciamo per $h = k$, la Lagrangiana non dipende dalla coordinata corrispondente, q_k , la (5.60) prende la forma

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k} \right) = 0, \quad (5.74)$$

che risulta immediatamente integrabile:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k} = \text{costante}, \quad (5.75)$$

dove, come abbiamo già visto nel precedente paragrafo, le funzioni $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k}$ dipendono in generale dalle \mathbf{q} , dalle $\dot{\mathbf{q}}$ e, eventualmente, dal tempo e la costante si determina per mezzo delle condizioni iniziali. Le $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k}$ prendono il nome di **momenti cinetici coniugati** e si rappresentano con il simbolo p_k :

$$p_k := \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k}, \quad (5.76)$$

Poiché

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k} \equiv \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k},$$

si vede immediatamente dalla forma dell'energia cinetica (si vedano le (5.62), (5.63) e (5.64)) che i momenti cinetici coniugati hanno le dimensioni di quantità di moto, se le coordinate lagrangiane hanno dimensioni di una lunghezza (come ad esempio le coordinate cartesiane) e di momento angolare se le coordinate lagrangiane sono adimensionali (ad esempio le coordinate angolari).

Esempi.

Consideriamo due semplici esempi per mostrare casi in cui la Lagrangiana non dipende effettivamente da tutte le \mathbf{q} :

- **Punto libero pesante**

Consideriamo un punto materiale P di massa m libero di muoversi nello spazio \mathbb{R}^3 . È naturale scegliere le coordinate cartesiane per individuarne la posizione rispetto all'osservatore fisso, per cui la Lagrangiana si scrive immediatamente come

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - mgz,$$

dove z è la distanza di P da un piano orizzontale. La Lagrangiana non dipende dalle coordinate x e y , pertanto i corrispondenti momenti cinetici p_x e p_y si conservano. Ma

$$p_x := \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} \quad \text{e} \quad p_y := \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}} = m\dot{y}$$

sono le componenti orizzontali della quantità di moto di P .

- **Il pendolo sferico**

Consideriamo un punto P , di massa m , pesante, e vincolato a muoversi su di una superficie sferica. Assumendo il centro della sfera come origine del riferimento dell'osservatore e R il raggio della sfera (Fig. 5.2).

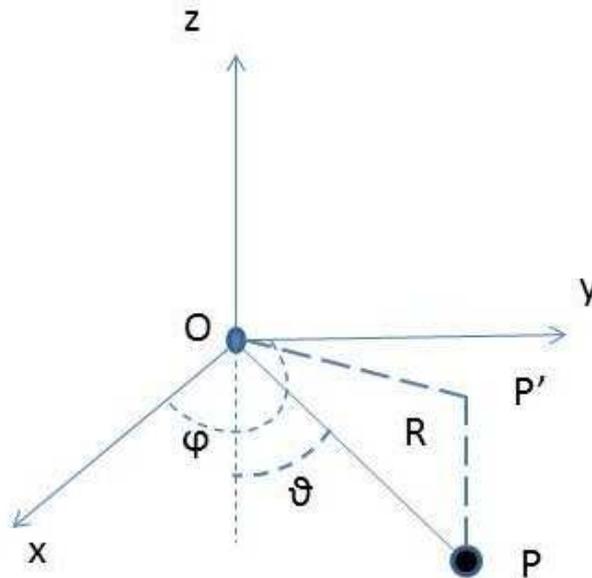


Figura 5.2

La posizione del punto, in coordinate sferiche è

$$\begin{cases} x = R \cos \phi \sin \theta \\ y = R \sin \phi \sin \theta, \\ z = -R \cos \theta \end{cases} \quad (5.77)$$

quindi la velocità è

$$\mathbf{v} = R[(-\dot{\phi} \sin \phi \sin \vartheta + \dot{\vartheta} \cos \phi \cos \vartheta)\mathbf{i} + (\dot{\phi} \cos \phi \sin \vartheta + \dot{\vartheta} \sin \phi \cos \vartheta)\mathbf{j} + \dot{\vartheta} \sin \vartheta \mathbf{k}]$$

e l'energia cinetica

$$T = \frac{1}{2}mR^2(\dot{\vartheta}^2 + \dot{\phi}^2 \sin^2 \vartheta). \quad (5.78)$$

L'energia potenziale è

$$U = -mgR \cos \vartheta,$$

quindi la Lagrangiana

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}mR^2(\dot{\vartheta}^2 + \dot{\phi}^2 \sin^2 \vartheta) + mgR \cos \vartheta$$

non dipende dalla coordinata ϕ . Di conseguenza il momento cinetico ad essa coniugato

$$p_\phi = mR^2 \dot{\phi} \sin^2 \vartheta = \text{costante};$$

p_ϕ è la componente verticale del momento angolare, che è conservata durante il moto, perché il momento rispetto ad O della forza peso giace in un piano orizzontale.

■

Per ottenere la conservazione dell'energia dalla formulazione lagrangiana occorre introdurre una particolare trasformazione di Legendre^{21 22}, detta Hamiltoniana o funzione di Hamilton:

$$H := \sum_{h=1}^{\ell} p_h \dot{q}_h - \mathcal{L}. \quad (5.79)$$

²¹Le trasformazioni di Legendre permettono di passare da un sistema di coordinate ad un altro: in questo caso dal set $(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$ al set $(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$.

²²Adrien-Marie Legendre, matematico francese (Parigi, 18 settembre 1752 - Parigi, 10 gennaio 1833).

Prima di tutto osserviamo che H è costante durante il moto del sistema, se la Lagrangiana \mathcal{L} non dipende esplicitamente dal tempo. Infatti:

$$\frac{dH}{dt} = \sum_{h=1}^{\ell} \dot{p}_h \dot{q}_h + \sum_{h=1}^{\ell} p_h \ddot{q}_h - \frac{d\mathcal{L}}{dt}.$$

Poiché $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t); t)$,

$$\frac{d\mathcal{L}}{dt} = \sum_{h=1}^{\ell} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_h} \dot{q}_h + \sum_{h=1}^{\ell} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_h} \ddot{q}_h + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t};$$

per la definizione di momento cinetico abbiamo

$$p_h = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_h}$$

e per la soluzione delle equazioni di Eulero-Lagrange deve essere

$$\dot{p}_h = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_h}.$$

Quindi

$$\frac{dH}{dt} = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} \quad (5.80)$$

ed H è costante se la Lagrangiana non dipende esplicitamente dal tempo. In questo caso, dunque

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_h} \equiv \frac{\partial T_2}{\partial \dot{q}_h}$$

quindi in (5.79)

$$\sum_{h=1}^{\ell} p_h \dot{q}_h = \sum_{h=1}^{\ell} \frac{\partial T_2}{\partial \dot{q}_h} \dot{q}_h.$$

Come già osservato precedentemente (e in Appendice 1), T_2 è una funzione omogenea di grado 2 nelle variabili $\dot{\mathbf{q}}$, quindi, per il teorema di Eulero sulle funzioni omogenee,

$$\sum_{h=1}^{\ell} \frac{\partial T_2}{\partial \dot{q}_h} \dot{q}_h = 2T_2 \equiv 2T$$

dato che i termini T_0 e T_1 sono identicamente nulli. Ricordando che $\mathcal{L} = T - U$, la (5.79) diviene quindi:

$$H = 2T - T + U = T + U, \quad (5.81)$$

che rappresenta l'energia meccanica totale del sistema. Nel caso in cui la Lagrangiana non dipenda esplicitamente dal tempo, per la (5.80), H resta costante nel tempo e quindi l'energia si conserva, costituendo un integrale primo per il moto del sistema.

5.8 Appendice 1

Dimostriamo che l'energia cinetica virtuale, T_2 , di un sistema materiale a vincoli olonomi è una forma quadratica definita positiva nelle $\dot{\mathbf{q}}$, cioè una funzione positiva per qualsiasi valore delle $\dot{\mathbf{q}}$ e nulla se e solo se sono nulle tutte le \dot{q}_h .

Riprendiamo la definizione (5.63) di T_2 , che può essere espressa nella forma seguente:

$$T_2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i \widehat{v}_i^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i \left(\sum_{h=1}^{\ell} \frac{\partial P_i}{\partial q_h} \dot{q}_h \right)^2 = \frac{1}{2} \sum_{h,k=1}^{\ell} a_{h,k}(\mathbf{q}, t) \dot{q}_h \dot{q}_k. \quad (5.82)$$

La (5.82) si può annullare per \dot{q}_h non tutte nulle se solo se si annullano i termini

$$\sum_{h=1}^{\ell} \frac{\partial P_i}{\partial q_h} \dot{q}_h, \quad \forall h = 1, \dots, n.$$

Le equazioni qui sopra ammetterebbero soluzioni non nulle per le $\dot{\mathbf{q}}$ se e solo se fra i vettori $\frac{\partial P_i}{\partial q_h}$ ce ne fossero almeno alcuni linearmente dipendenti. Questo però è escluso dalle ipotesi sui vincoli e sul numero di gradi di libertà del sistema considerato. Infatti i vettori $\frac{\partial P_i}{\partial q_h}$ costituiscono le colonne della matrice (5.41), che, per ipotesi, deve avere rango massimo, ovvero ℓ .

Questo risultato comporta una conseguenza fondamentale sul determinante della matrice $\mathcal{H}_{T,\dot{\mathbf{q}}}$:

$$\mathbb{D} := \det \mathcal{H}_{T,\dot{\mathbf{q}}} = \det \{a_{h,k}\}_{h,k=1}^{\ell} \neq 0.$$

Infatti, se \mathbb{D} fosse nullo per qualche valore delle \mathbf{q} e del tempo, il sistema di equazioni lineari

$$\sum_{k=1}^{\ell} a_{h,k} \dot{q}_k = 0$$

ammetterebbe soluzioni anche per \dot{q}_k non tutte nulle. Ma T_2 è una funzione omogenea di grado 2 nelle $\dot{\mathbf{q}}$ e

$$\frac{\partial T_2}{\partial \dot{q}_h} = \sum_{k=1}^{\ell} a_{h,k} \dot{q}_k.$$

Il teorema di Eulero sulle funzioni omogenee (T_2 è una funzione omogenea di grado 2 nelle $\dot{\mathbf{q}}$) afferma che

$$\sum_{h=1}^{\ell} \frac{\partial T_2}{\partial \dot{q}_h} \dot{q}_h = 2T_2$$

e quindi $\mathbb{D} = 0$ implicherebbe $T_2 = 0$ anche per \dot{q}_k non tutte nulle, contrariamente a quanto prima dimostrato.

Il sistema di equazioni differenziali, rappresentato nelle forme (5.67), (5.68) e (5.69), tutte equivalenti, può quindi essere esplicitato rispetto alle $\ddot{\mathbf{q}}$ usando il metodo di Cramer per la risoluzione del sistema di equazioni lineari, oppure diagonalizzando la matrice $\mathcal{H}_{T,\dot{\mathbf{q}}}$ o costruendo la sua inversa.

5.9 Appendice 2

Ricordiamo il teorema della funzione di Liapunov (detto anche II criterio di Liapunov) che stabilisce una **condizione sufficiente** per la stabilità di una soluzione di equilibrio per equazioni differenziali autonome del tipo

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{F}(\mathbf{x}), \quad (5.83)$$

dove $\mathbf{F} : \mathbb{R}^n \supseteq S \rightarrow \mathbb{R}^n$ ed S è un insieme aperto.

Teorema della funzione di Liapunov 5.9.1 *Sia \mathbf{x}_e una soluzione di equilibrio per la (5.83), i.e. $\mathbf{F}(\mathbf{x}_e) = 0$. \mathbf{x}_e è stabile secondo Liapunov se si può costruire una funzione $\Lambda : S \rightarrow \mathbb{R}$ che verifichi le seguenti condizioni:*

- *esiste un intorno $U_{\mathbf{x}_e} \subseteq S$ della soluzione \mathbf{x}_e tale che su di esso Λ sia continua con derivata prima continua: $\Lambda \in \mathcal{C}^1(U_{\mathbf{x}_e})$;*
- $\Lambda(\mathbf{x}_e) = 0$;
- Λ *sia strettamente positiva in ogni punto di $U_{\mathbf{x}_e}$, tranne che in \mathbf{x}_e :*

$$\Lambda(\mathbf{x}) > 0 \quad \forall \mathbf{x} \in U_{\mathbf{x}_e} \setminus \{\mathbf{x}_e\};$$

- *la derivata di Lie ²³ (o derivata lungo le soluzioni) di Λ è non positiva in ogni punto dell'intorno $U_{\mathbf{x}_e}$:*

$$\frac{d\Lambda(\mathbf{x})}{dt} = \nabla\Lambda \cdot \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \nabla\Lambda \cdot \mathbf{F}(\mathbf{x}) \leq 0, \quad \forall \mathbf{x} \in U_{\{\mathbf{x}_e\}}. \quad \blacksquare$$

²³Marius Sophus Lie, matematico norvegese (Nordfjordeid, 17 dicembre 1842 - Oslo, 18 febbraio 1899).

Capitolo 6

Esercizi

6.1 Il pendolo matematico

Consideriamo un pendolo formato da un punto materiale P di massa m , vincolato mediante un'asta rigida di lunghezza ℓ e di massa trascurabile ad un punto fisso O , in modo da muoversi in un piano verticale.

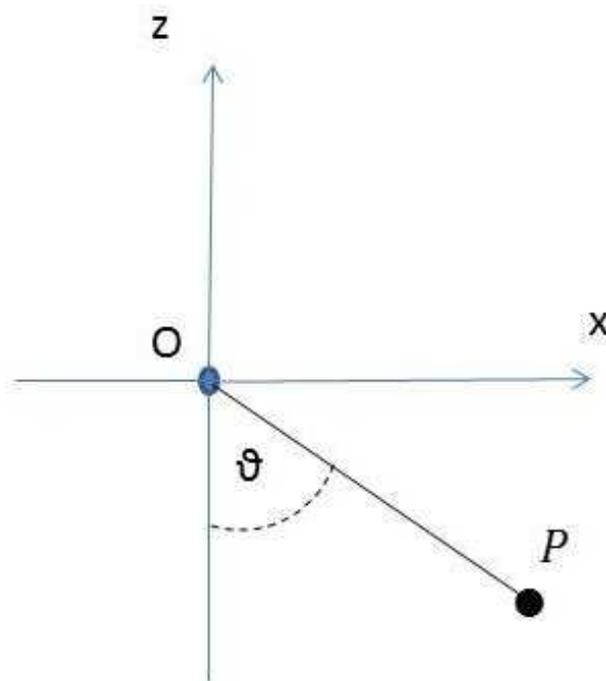


Figura 6.1

Scelta come coordinata lagrangiana l'angolo ϑ indicato in figura, la Lagrangiana del pendolo matematico si scrive in modo semplice:

$$\mathcal{L} = T - U = \frac{1}{2}m\ell^2\dot{\vartheta}^2 + mgl \cos \vartheta , \quad (6.1)$$

che dà luogo all'equazione di Eulero-Lagrange

$$m\ell^2\ddot{\vartheta} + mgl \sin \vartheta = 0 , \quad (6.2)$$

che, ricondotta alla forma normale, dà luogo all'equazione

$$\ddot{\vartheta} + \omega_P^2 \sin \vartheta = 0 , \quad (6.3)$$

con $\omega_P = \sqrt{\frac{g}{\ell}}$. Se vogliamo tenere conto della resistenza (viscosa) dell'aria, possiamo usare il modello lineare, introducendo la forza non conservativa

$$\mathbf{F}_{\mathbf{v}} = -\lambda \mathbf{v} , \quad (6.4)$$

dove λ , il coefficiente di viscosità, ha le dimensioni

$$[\lambda] = [M][T]^{-1} , \quad (6.5)$$

dove $[M]$ indica la dimensione della massa e $[T]$ quella del tempo.

Per introdurre il contributo della forza di resistenza viscosa nella (6.2) dobbiamo calcolarne la componente lagrangiana

$$F_{\mathbf{v},\mathcal{T}} = -\lambda \mathbf{v} \cdot \frac{dP}{d\vartheta} .$$

Ma

$$(P - O) = \ell(\sin \vartheta \mathbf{i} - \cos \vartheta \mathbf{k})$$

e quindi

$$\mathbf{v} = \dot{\vartheta} \ell(\cos \vartheta \mathbf{i} + \sin \vartheta \mathbf{k}) , \quad \frac{dP}{d\vartheta} = \ell(\cos \vartheta \mathbf{i} + \sin \vartheta \mathbf{k}) . \quad (6.6)$$

La componente lagrangiana della forza viscosa è quindi

$$F_{\mathbf{v},\mathcal{T}} = -\lambda \ell^2 \dot{\vartheta}$$

che rappresenta il momento della forza (6.4) rispetto al punto O . L'equazione (6.2) prende quindi la forma

$$m\ell^2\ddot{\vartheta} + mgl \sin \vartheta = -\lambda \ell^2 \dot{\vartheta} . \quad (6.7)$$

6.2 Il pendolo ad asta

Consideriamo adesso un pendolo formato da un'asta materiale omogenea OA , di lunghezza ℓ e massa M , libera di ruotare in un piano verticale, essendo il suo estremo O fissato ad una cerniera cilindrica liscia.

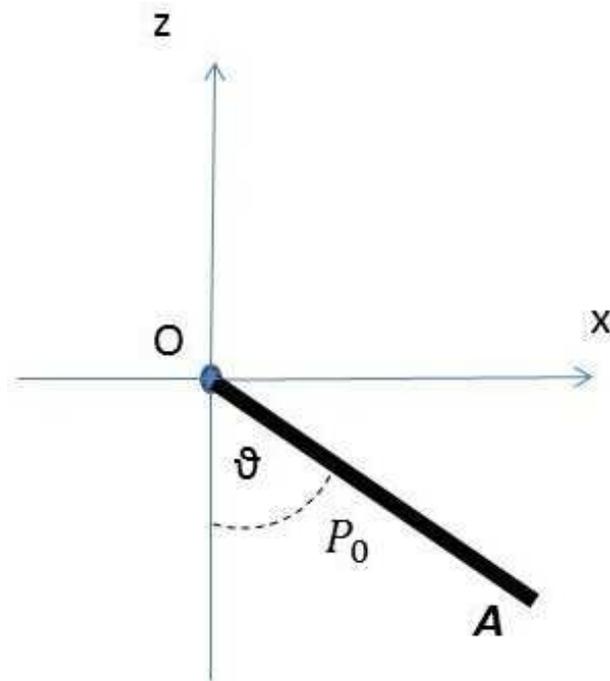


Figura 6.2

La Lagrangiana del sistema si scrive facilmente, essendo l'energia cinetica solo quella di rotazione attorno ad un asse fisso:

$$T = \frac{1}{2} I_O \omega^2 ,$$

dove I_O è il momento di inerzia dell'asta rispetto all'asse di rotazione passante per O ed ortogonale al piano xz e ω il modulo della velocità di istantanea rotazione. Con la scelta della coordinata lagrangiana ϑ indicata in figura avremo dunque

$$T = \frac{1}{6} M \ell^2 \dot{\vartheta}^2 \quad \text{e} \quad U = -Mg \frac{\ell}{2} \cos \vartheta ,$$

essendo la forza peso l'unica forza attiva (e conservativa) agente sul sistema. L'equazione di Eulero-Lagrange risulta quindi:

$$\frac{1}{3} M \ell^2 \ddot{\vartheta} + Mg \frac{\ell}{2} \sin \vartheta = 0 , \quad (6.8)$$

che può essere ricondotta alla forma normale

$$\ddot{\vartheta} + \omega_A^2 \sin \vartheta = 0, \quad (6.9)$$

$$\text{con } \omega_A = \sqrt{\frac{3g}{2\ell}}.$$

Si può osservare che $\omega_A > \omega_P$ e quindi, nell'approssimazione delle piccole oscillazioni, il periodo T_A del pendolo ad asta è più piccolo del periodo T_P di oscillazione del pendolo matematico: l'asta oscilla più rapidamente del punto materiale. Affrontiamo adesso il problema della resistenza dell'aria, nell'approssimazione lineare di resistenza viscosa. Per costruire un modello corretto dobbiamo pensare che ogni elemento infinitesimo dell'asta sia soggetto ad una forza resistiva dipendente linearmente dalla sua velocità. Se scriviamo l'equazione di Newton per una particella di massa infinitesima dm soggetta ad una forza di resistenza viscosa, dobbiamo pensare che la forza agente sia una grandezza infinitesima dello stesso ordine di dm , altrimenti avremmo un'accelerazione infinita. L'equazione sarà dunque della forma

$$(dm)\mathbf{a} = -(d\lambda)\mathbf{v},$$

essendo \mathbf{a} e \mathbf{v} grandezze finite. È evidente quindi che, per ottenere ordini di grandezza confrontabili fra i due membri dell'equazione in modo che essa abbia un senso, sia il parametro $d\lambda$ che debba essere un infinitesimo dello stesso ordine di dm . Dall'analisi dimensionale di λ svolta in (6.5), segue che l'espressione corretta da usare in questo caso è

$$d\lambda = \Lambda dm,$$

dove Λ è un parametro di valore finito e delle dimensioni del reciproco del tempo: $[\Lambda] = [T]^{-1}$. Se dm è la massa infinitesima di un elemento di lunghezza infinitesima, ds , dell'asta, avremo

$$dm = \rho ds = \frac{M}{\ell} ds,$$

dove ρ è la densità dell'asta OA , per ipotesi omogenea. Pertanto, la componente lagrangiana della forza di resistenza viscosa agente su un generico elemento infinitesimo dell'asta è

$$dF_{\mathbf{v},\mathcal{T}} = - \left(\Lambda \frac{M}{\ell} ds \right) \mathbf{v} \cdot \frac{dP}{d\vartheta},$$

dove P è il punto dell'asta di ascissa interna s (i.e. dista s dal punto O) e \mathbf{v} è la sua velocità. Riprendendo le (6.6), avremo in questo caso

$$\mathbf{v} = \dot{\vartheta} s (\cos \vartheta \mathbf{i} + \sin \vartheta \mathbf{k}), \quad \frac{dP}{d\vartheta} = s (\cos \vartheta \mathbf{i} + \sin \vartheta \mathbf{k}) \quad (6.10)$$

e in conseguenza

$$d\mathbf{F}_{\mathbf{v},\mathcal{T}} = -\Lambda \frac{M}{\ell} \dot{\vartheta} s^2 ds .$$

La componente lagrangiana della forza di resistenza viscosa agente sul pendolo si ottiene integrando su tutto il dominio della s , ovvero sull'intervallo $[0, \ell]$:

$$\mathbf{F}_{\mathbf{v},\mathcal{T}} = -\Lambda \frac{M}{\ell} \dot{\vartheta} \int_0^\ell s^2 ds = -\Lambda \frac{M\ell^2}{3} \dot{\vartheta} = -\lambda \frac{\ell^2}{3} \dot{\vartheta} . \quad (6.11)$$

L'equazione di Eulero-Lagrange per il pendolo ad asta, soggetto ad una resistenza viscosa è quindi

$$\frac{1}{3} M\ell^2 \ddot{\vartheta} + Mg \frac{\ell}{2} \sin \vartheta = -\lambda \frac{\ell^2}{3} \dot{\vartheta} , \quad (6.12)$$

dove $\lambda = M\Lambda$.

Per interpretare correttamente il significato fisico della (6.12) scriviamo le equazioni cardinali del sistema. Per quanto riguarda la prima equazione avremo

$$\mathbf{Q} = M\mathbf{v}_{P_0} = M \frac{\ell}{2} \dot{\vartheta} (\cos \vartheta \mathbf{i} + \sin \vartheta \mathbf{k})$$

e quindi

$$\dot{\mathbf{Q}} = M\mathbf{a}_{P_0} = M \frac{\ell}{2} \left[\ddot{\vartheta} (\cos \vartheta \mathbf{i} + \sin \vartheta \mathbf{k}) - \dot{\vartheta}^2 (\sin \vartheta \mathbf{i} - \cos \vartheta \mathbf{k}) \right] , \quad (6.13)$$

dove P_0 rappresenta il centro di massa dell'asta. Le forze che dobbiamo considerare sono il peso $M\mathbf{g}$, la reazione vincolare in O , Φ_O , e la risultante delle forze di resistenza viscosa, $\mathbf{F}_{\mathbf{v}}$. Per il calcolo di quest'ultima occorre procedere scrivendo la forza che agisce sull'elemento infinitesimo dm dell'asta:

$$d\mathbf{F}_{\mathbf{v}} = -\Lambda \frac{M}{\ell} s \dot{\vartheta} (\cos \vartheta \mathbf{i} + \sin \vartheta \mathbf{k}) ds$$

ed integrarla sull'intervallo di variazione dell'ascissa interna s :

$$\mathbf{F}_{\mathbf{v}} = -\Lambda \frac{M}{\ell} \dot{\vartheta} (\cos \vartheta \mathbf{i} + \sin \vartheta \mathbf{k}) \int_0^\ell s ds = -\lambda \frac{\ell}{2} \dot{\vartheta} (\cos \vartheta \mathbf{i} + \sin \vartheta \mathbf{k}) . \quad (6.14)$$

La I equazione cardinale si scrive dunque come

$$M\mathbf{a}_{P_0} = M\mathbf{g} + \mathbf{F}_{\mathbf{v}} + \Phi_O . \quad (6.15)$$

La (6.15) può essere scomposta nelle due componenti lungo le direzioni individuate da \mathbf{i} e \mathbf{k} . La I equazione cardinale contiene sia l'incognita di configurazione ϑ , sia le due componenti della reazione vincolare incognita Φ_O e

non è quindi sufficiente per la risoluzione del problema del moto del pendolo. Se però utilizziamo l'equazione di Eulero-Lagrange (6.12) per calcolare, a partire da assegnate condizioni iniziali, la soluzione $\vartheta = \vartheta(t)$, la I equazione cardinale ci permette di conoscere la reazione vincolare Φ_O in funzione del tempo.

Nell'ambito della Meccanica newtoniana il problema del moto sarebbe stato affrontato scrivendo la II equazione cardinale rispetto al punto O . L'equazione è ovviamente vettoriale, ma essendo il sistema piano, sia il momento angolare che i momenti delle forze hanno una sola componente lungo la direzione di \mathbf{j} . Sotto l'ipotesi di cerniera liscia come vincolo in O , otteniamo un'equazione che contiene la sola incognita di configurazione ϑ ed è immediato verificare che tale equazione coincide con l'equazione di Eulero-Lagrange (6.12). I primi due termini a sinistra del segno di uguaglianza sono, rispettivamente, la componente scalare della derivata rispetto al tempo del momento angolare dell'asta rispetto ad O e del momento del peso (cambiato di segno). Verifichiamo che il termine a destra dell'uguale sia il momento risultante delle forze di resistenza viscosa.

Calcoliamo il momento rispetto ad O della resistenza viscosa agente su un elemento dell'asta di massa infinitesima dm , individuato da un punto P , di scissa interna s :

$$d\mathbf{M}_v(O) = (P-O) \wedge d\mathbf{F}_v = s(\sin \vartheta \mathbf{i} - \cos \vartheta \mathbf{k}) \wedge \left(-\Lambda \frac{M}{\ell} s \dot{\vartheta} (\cos \vartheta \mathbf{i} + \sin \vartheta \mathbf{k}) ds \right),$$

ovvero

$$d\mathbf{M}_v(O) = \left(\Lambda \frac{M}{\ell} s^2 \dot{\vartheta} ds \right) \mathbf{j}.$$

Integrando fra 0 ed ℓ si ottiene

$$\mathbf{M}_v(O) = \left(\Lambda \frac{M}{\ell} \dot{\vartheta} \int_0^\ell s^2 ds \right) \mathbf{j} = \lambda \dot{\vartheta} \frac{\ell^2}{3} \mathbf{j}.$$

Per quanto riguarda il momento della forza peso, avremo:

$$\mathbf{M}_{P_{eso}}(O) = (P_0-O) \wedge (-Mg\mathbf{k}) = \frac{\ell}{2} (\sin \vartheta \mathbf{i} - \cos \vartheta \mathbf{k}) \wedge (-Mg\mathbf{k}) = Mg \frac{\ell}{2} \sin \vartheta \mathbf{j},$$

e per il momento angolare e la sua derivata avremo

$$\mathbf{K}(O) = -\frac{1}{3} M \ell^2 \dot{\vartheta} \mathbf{j} \quad \text{e} \quad \dot{\mathbf{K}}(O) = -\frac{1}{3} M \ell^2 \ddot{\vartheta} \mathbf{j}$$

perché il verso di \mathbf{j} è entrante rispetto al piano della figura e, viceversa, abbiamo scelto il verso antiorario come verso positivo di crescita dell'angolo ϑ

rispetto alla nostra visuale della figura. Il risultato è che $\omega = -\dot{\vartheta}\mathbf{j}$. Riportando questi risultati nella II equazione cardinale

$$\dot{\mathbf{K}}(O) = \mathbf{M}^{ext}(O)$$

e considerando la sola componente scalare, dato che i vettori coinvolti hanno tutti la stessa direzione, avremo l'equazione di moto per il pendolo ad asta che coincide con l'equazione di Eulero-Lagrange (6.12).

È interessante notare che il momento risultante della forza di resistenza viscosa si può ottenere, in modo equivalente, applicando la risultante \mathbf{F}_v in un punto \hat{P} dell'asta avente ascissa interna $\hat{s} = \frac{2}{3}\ell$. Infatti, se cerchiamo il centro delle forze di resistenza viscosa, dobbiamo porre

$$(\hat{P} - O) \wedge \mathbf{F}_v = \mathbf{M}_v(O),$$

ovvero

$$\hat{s}(\sin \vartheta \mathbf{i} - \cos \vartheta \mathbf{k}) \wedge \left(-\lambda \frac{\ell}{2} \dot{\vartheta} (\cos \vartheta \mathbf{i} + \sin \vartheta \mathbf{k}) \right) = \lambda \dot{\vartheta} \frac{\ell^2}{3} \mathbf{j}, \quad (6.16)$$

che ha come soluzione

$$\hat{s} = \frac{2}{3}\ell.$$

Questo risultato è del tutto concorde con quello che otterremo nell'Esercizio 6.3 per il centro di applicazione della risultante delle forze centrifughe (si veda la (6.19)). In entrambi i casi, infatti, forze di resistenza viscosa e forze centrifughe, dipendono linearmente dalla distanza dal punto O .

6.3 Il pendolo rotante

Consideriamo un pendolo formato da un'asta materiale omogenea di massa m e lunghezza ℓ , posto in un piano verticale passante per la verticale in O e che ruota con velocità ω costante attorno a tale asse, individuato dal versore fisso \mathbf{e}_3 .

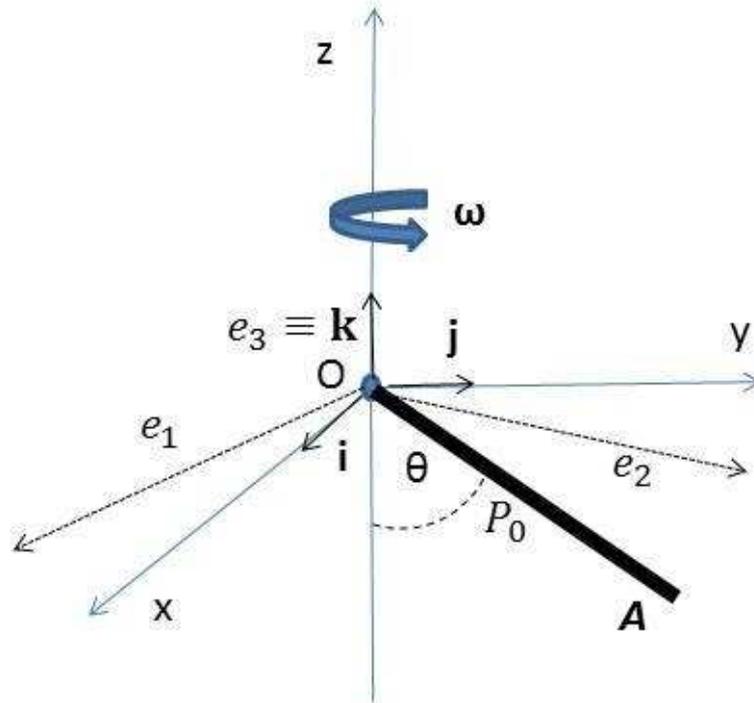


Figura 6.3

Equazioni Cardinali nel riferimento rotante

Se intendiamo scrivere le Equazioni Cardinali nel riferimento rotante S , caratterizzato dall'origine O e dai versori $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k} \equiv \mathbf{e}_3$, abbiamo un'espressione semplice per il momento angolare del pendolo, che, vincolato a muoversi nel piano individuato dal punto O e dai versori \mathbf{j}, \mathbf{k} , ruota attorno alla cerniera cilindrica posta in O . Indicato con \mathbf{i} il versore dell'asse della cerniera, ortogonale al piano, avremo

$$\mathbf{K}(O) = I_O \dot{\mathbf{i}} = \frac{1}{3} m \ell^2 \dot{\mathbf{i}},$$

la cui derivata rispetto al tempo in S è semplicemente

$$\dot{\mathbf{K}}(O) \Big|_S = \frac{1}{3} m \ell^2 \ddot{\mathbf{i}}.$$

Il riferimento S non è inerziale, per cui dobbiamo tenere conto dell'effetto delle forze "apparenti", quali la forza centrifuga e quella di Coriolis. Per calcolare la risultante ed il momento risultante (rispetto ad O) della forza centrifuga occorre tener conto che l'asta OA è una distribuzione continua ed omogenea di massa, di densità costante $\rho = \frac{m}{\ell}$ e che, scelta un'ascissa ξ ,

interna all'asta, $\xi \in [0, \ell]$, $\xi(O) = 0$, $\xi(A) = \ell$ avremo che la forza centrifuga agente su un generico elemento infinitesimo dell'asta, di ascissa ξ e spessore $d\xi$, è

$$d\mathbf{F}_{cf} = \omega^2 \xi \sin \vartheta dm \mathbf{j} = \frac{m}{\ell} \omega^2 \sin \vartheta \xi d\xi \mathbf{j}$$

e il corrispondente momento è

$$d\mathbf{M}_{cf}(O) = (P-O) \wedge d\mathbf{F}_{cf} = \xi (\sin \vartheta \mathbf{j} - \cos \vartheta \mathbf{k}) \wedge \left(\frac{m}{\ell} \omega^2 \sin \vartheta \xi d\xi \mathbf{j} \right) = \frac{m}{\ell} \omega^2 \sin \vartheta \cos \vartheta \xi^2 d\xi \mathbf{i},$$

dove P è il punto dell'asta avente ascissa ξ .

Risultante e momento risultante sono quindi

$$\mathbf{F}_{cf} = \left(\frac{m}{\ell} \omega^2 \sin \vartheta \int_0^\ell \xi d\xi \right) \mathbf{j} = \left(\frac{1}{2} m \ell \omega^2 \sin \vartheta \right) \mathbf{j}, \quad (6.17)$$

$$\mathbf{M}_{cf}(O) = \left(\frac{m}{\ell} \omega^2 \sin \vartheta \cos \vartheta \int_0^\ell \xi^2 d\xi \right) \mathbf{i} = \left(\frac{1}{3} m \ell^2 \omega^2 \sin \vartheta \cos \vartheta \right) \mathbf{i}. \quad (6.18)$$

Sostituendo la (6.17) in (6.18), si ottiene

$$\mathbf{M}_{cf}(O) = \left(\frac{2}{3} \ell \cos \vartheta F_{cf} \right) \mathbf{i}, \quad (6.19)$$

dove $F_{cf} = |\mathbf{F}_{cf}|$. Il risultato precedente ci mostra come il momento delle forze centrifughe (che non sono forze costanti come il peso, ma variano linearmente con la distanza dall'asse di rotazione) si può ottenere applicando la risultante delle forze centrifughe ad un punto posto a distanza $\frac{2}{3}\ell$ dall'estremo O dell'asta.

Con un procedimento analogo si ottengono risultante e momento risultante della forza di Coriolis, la cui espressione per un elemento infinitesimo di massa, individuato dal vettore $(P - O) = \xi(\sin \vartheta \mathbf{j} - \cos \vartheta \mathbf{k})$, è

$$d\mathbf{F}_{Co} = -2(\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{v}_P) dm,$$

dove, derivando $(P - O)$

$$\mathbf{v}_P = \xi \dot{\vartheta} (\cos \vartheta \mathbf{j} + \sin \vartheta \mathbf{k}). \quad (6.20)$$

Sostituendo l'espressione della velocità nella precedente, otteniamo

$$d\mathbf{F}_{Co} = -2\omega \mathbf{k} \wedge [\xi \dot{\vartheta} (\cos \vartheta \mathbf{j} + \sin \vartheta \mathbf{k})] \frac{m}{\ell} d\xi = \left(2\omega \dot{\vartheta} \cos \vartheta \frac{m}{\ell} \xi d\xi \right) \mathbf{i}.$$

Integrando rispetto alla variabile ξ (ascissa interna) sull'intervallo $[0, \ell]$, si ottiene la risultante delle forze di Coriolis:

$$\mathbf{F}_{Co} = \left(m \ell \omega \dot{\vartheta} \cos \vartheta \right) \mathbf{i}.$$

Per quanto riguarda il momento della forza di Coriolis avremo

$$\begin{aligned} d\mathbf{M}_{C_o}(O) &= (P - O) \wedge d\mathbf{F}_{C_o} = \xi(\sin \vartheta \mathbf{j} - \cos \vartheta \mathbf{k}) \wedge \left(2\omega \dot{\vartheta} \cos \vartheta \frac{m}{\ell} \xi d\xi \right) \mathbf{i} \\ &= -2 \frac{m}{\ell} \omega \dot{\vartheta} \cos \vartheta (\cos \vartheta \mathbf{j} + \sin \vartheta \mathbf{k}) \xi^2 d\xi. \end{aligned}$$

L'integrazione rispetto a ξ sull'intervallo che corrisponde alla lunghezza dell'asta ci fornisce il momento risultante delle forze di Coriolis applicate:

$$\mathbf{M}_{C_o}(O) = -\frac{2}{3} m \ell^2 \omega \dot{\vartheta} \cos \vartheta (\cos \vartheta \mathbf{j} + \sin \vartheta \mathbf{k}) = -\frac{2}{3} \ell F_{C_o} (\cos \vartheta \mathbf{j} + \sin \vartheta \mathbf{k}),$$

dove $F_{C_o} = |\mathbf{F}_{C_o}|$ è il modulo del vettore forza di Coriolis. L'ultima uguaglianza ci mostra che il sistema delle forze di Coriolis è equivalente alla risultante applicata a due terzi dell'asta.

Il momento rispetto ad O della forza peso è

$$\mathbf{M}_{\text{peso}}(O) = (P_0 - O) \wedge m\mathbf{g} = \frac{\ell}{2} (\sin \vartheta \mathbf{j} - \cos \vartheta \mathbf{k}) \wedge (-m\mathbf{g}\mathbf{k}) = -\frac{1}{2} mgl \sin \vartheta \mathbf{i}.$$

Scriviamo adesso la II Equazione Cardinale del pendolo rotante, rispetto all'osservatore S :

$$\frac{1}{3} m \ell^2 \ddot{\vartheta} \mathbf{i} = \mathbf{M}_{\text{peso}}(O) + \mathbf{M}_{C_o}(O) + \mathbf{M}_{cf}(O) + \mathbf{M}_{\Phi}(O),$$

che in componenti si scrive

$$\begin{cases} \frac{1}{3} m \ell^2 \ddot{\vartheta} = -\frac{1}{2} mgl \sin \vartheta + \frac{1}{3} m \ell^2 \omega^2 \sin \vartheta \cos \vartheta \\ 0 = -\frac{2}{3} m \ell^2 \omega \dot{\vartheta} \cos^2 \vartheta + M_{\Phi,y}(O) \\ 0 = -\frac{2}{3} m \ell^2 \omega \dot{\vartheta} \sin \vartheta \cos \vartheta + M_{\Phi,z}(O), \end{cases} \quad (6.21)$$

dove $M_{\Phi,x}(O) = 0$ perché la cerniera in O è un vincolo liscio e il contributo dovuto alle forze centrifughe è riportato in rosso e quello delle forze di Coriolis in blu.

Osserviamo che la prima delle equazioni (6.21) è sufficiente per risolvere il problema del moto del pendolo (un grado di libertà, individuato dalla coordinata angolare ϑ) e che, se la cerniera cilindrica in O è liscia, non presenta momento di reazioni vincolari. Viceversa le altre due equazioni, in presenza di movimento del sistema (i.e. $\dot{\vartheta}$ e ω diversi da zero) necessitano della presenza di momenti di reazione vincolare che hanno la funzione di sostenere i vincoli.

Il valore di tali momenti dipende dal moto ed è calcolabile in funzione del tempo, quando si sia risolto il problema del moto e si conosca $\vartheta = \vartheta(t, \vartheta_0)$.

Scriviamo adesso la I Equazione Cardinale, ancora nel riferimento in rotazione S . Per scrivere l'accelerazione del centro di massa P_0 è sufficiente derivare la velocità (6.20) con $\frac{\ell}{2}$, ascissa interna del centro di massa, al posto di ξ :

$$\mathbf{a}_{P_0}|_S = \frac{\ell}{2} \left[\left(\ddot{\vartheta} \cos \vartheta - \dot{\vartheta}^2 \sin \vartheta \right) \mathbf{j} + \left(\ddot{\vartheta} \sin \vartheta + \dot{\vartheta}^2 \cos \vartheta \right) \mathbf{k} \right]. \quad (6.22)$$

Di conseguenza la I Equazione Cardinale si scrive:

$$m \mathbf{a}_{P_0}|_S = m\mathbf{g} + \mathbf{F}_{cf} + \mathbf{F}_{Co} + \mathbf{\Phi},$$

dove $\mathbf{\Phi}$ è la risultante delle reazioni vincolari. In componenti avremo

$$\begin{cases} 0 = m\ell\omega\dot{\vartheta} \cos \vartheta + \Phi_x \\ m\frac{\ell}{2} \left(\ddot{\vartheta} \cos \vartheta - \dot{\vartheta}^2 \sin \vartheta \right) = \frac{1}{2}m\ell\omega^2 \sin \vartheta + \Phi_y \\ m\frac{\ell}{2} \left(\ddot{\vartheta} \sin \vartheta + \dot{\vartheta}^2 \cos \vartheta \right) = -mg + \Phi_z, \end{cases} \quad (6.23)$$

dove, come nella (6.21), il contributo dovuto alle forze centrifughe è riportato in rosso e quello delle forze di Coriolis in blu. Osserviamo che la prima delle (6.23) richiede, in presenza di movimento, una componente non nulla di reazione vincolare parallela alla direzione individuata dal versore \mathbf{i} . Le altre due componenti della risultante delle reazioni vincolari sono calcolabili in funzione del tempo dopo la risoluzione del problema di moto.

Equazioni Cardinali nel riferimento fisso

Se scriviamo le Equazioni Cardinali nel riferimento fisso Σ , che vede ruotare S con velocità di rotazione costante attorno al comune asse $\mathbf{e}_3 \equiv \mathbf{k}$, occorre esprimere il momento angolare $\mathbf{K}(O)$ rispetto all'osservatore fisso. Il vettore velocità di rotazione, rispetto all'osservatore fisso acquista la componente $\omega\mathbf{k}$, mentre la matrice di inerzia, in una generica configurazione individuata dall'angolo ϑ , risulta

$$\sigma(O) = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}m\ell^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3}m\ell^2 \cos^2 \vartheta & \frac{1}{3}m\ell^2 \sin \vartheta \cos \vartheta \\ 0 & \frac{1}{3}m\ell^2 \sin \vartheta \cos \vartheta & \frac{1}{3}m\ell^2 \sin^2 \vartheta \end{pmatrix}, \quad (6.24)$$

dove gli elementi di inerzia della matrice sono calcolati rispetto alle direzioni della base di S .

Applicando $\sigma(O)$ al vettore velocità di istantanea rotazione dell'asta OA rispetto all'osservatore fisso Σ , $\boldsymbol{\omega}_{OA} = (\dot{\vartheta}, 0, \omega)^T$, avremo

$$\mathbf{K}(O) = \frac{1}{3}m\ell^2\dot{\vartheta}\mathbf{i} + \frac{1}{3}m\ell^2\omega\sin\vartheta\cos\vartheta\mathbf{j} + \frac{1}{3}m\ell^2\omega\sin^2\vartheta\mathbf{k}. \quad (6.25)$$

Il momento angolare è quello osservato nel riferimento fisso Σ , ma è rappresentato nella base del riferimento rotante S . La sua derivata in Σ deve quindi essere calcolata con le formule di Poisson (2.32):

$$\left. \frac{d}{dt}\mathbf{K}(O) \right|_{\Sigma} = \left. \frac{d}{dt}\mathbf{K}(O) \right|_S + \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{K}(O),$$

dove $\boldsymbol{\omega} = \omega\mathbf{k}$ è il vettore velocità di istantanea rotazione della terna S rispetto alla terna fissa Σ .

Avremo quindi

$$\left. \frac{d}{dt}\mathbf{K}(O) \right|_S = \frac{1}{3}m\ell^2\ddot{\vartheta}\mathbf{i} + \frac{1}{3}m\ell^2\omega\dot{\vartheta}(\cos^2\vartheta - \sin^2\vartheta)\mathbf{j} + \frac{2}{3}m\ell^2\omega\dot{\vartheta}\sin\vartheta\cos\vartheta\mathbf{k}.$$

$$\omega\mathbf{k} \wedge \mathbf{K}(O) = -\frac{1}{3}m\ell^2\omega\sin\vartheta\cos\vartheta\mathbf{i} + \frac{1}{3}m\ell^2\dot{\vartheta}\mathbf{j}.$$

Nel riferimento fisso Σ le forze (ed i momenti delle forze) da considerare sono solo la forza peso e le reazioni vincolari. Il momento della forza peso rispetto al punto O resta invariato (abbiamo cambiato osservatore da S a Σ ma non la rappresentazione), quindi

$$\mathbf{M}_{\text{peso}}(O) = -\frac{1}{2}mg\ell\sin\vartheta\mathbf{i}.$$

Scriviamo quindi la II Equazione Cardinale del pendolo rotante, rispetto all'osservatore Σ :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{3}m\ell^2\ddot{\vartheta} - \frac{1}{3}m\ell^2\omega^2\sin\vartheta\cos\vartheta = -\frac{1}{2}mg\ell\sin\vartheta \\ +\frac{2}{3}m\ell^2\omega\dot{\vartheta}\cos^2\vartheta = M(O)_{\Phi,y} \\ +\frac{2}{3}m\ell^2\omega\dot{\vartheta}\sin\vartheta\cos\vartheta = M(O)_{\Phi,z}, \end{array} \right. \quad (6.26)$$

dove in rosso e in blu sono indicati quei termini della derivata del momento angolare corrispondenti per l'osservatore S , rispettivamente, al momento risultante delle forze centrifughe e delle forze di Coriolis. Le equazioni sono, ovviamente, le stesse, ma cambia l'interpretazione! I termini interpretati

dall'osservatore mobile come dovuti ad azione di forze (fittizie) vengono spostati al primo membro, essendo per l'osservatore fisso dei contributi della variazione del momento angolare.

Considerazioni analoghe valgono per la I Equazione Cardinale. Possiamo calcolare l'accelerazione del centro di massa P_0 del pendolo, derivando la sua velocità:

$$\mathbf{v}_{P_0}|_{\Sigma} = \frac{\ell}{2} \left[-\omega \sin \vartheta \mathbf{i} + \dot{\vartheta}(\cos \vartheta \mathbf{j} + \sin \vartheta \mathbf{k}) \right].$$

dove il termine in colore verde è la componente della velocità dovuta alla rotazione di S rispetto a Σ . Per ottenere l'accelerazione in Σ ricorriamo di nuovo alla formula di Poisson. Abbiamo già l'espressione dell'accelerazione del centro di massa nel riferimento S (si veda la (6.22)), a cui dobbiamo aggiungere il contributo della rotazione attorno all'asse di direzione \mathbf{k} :

$$\frac{d}{dt} \mathbf{v}_{P_0}|_S = \frac{\ell}{2} \left[-\omega \dot{\vartheta} \cos \vartheta \mathbf{i} + \left(\ddot{\vartheta} \cos \vartheta - \dot{\vartheta}^2 \sin \vartheta \right) \mathbf{j} + \left(\ddot{\vartheta} \sin \vartheta + \dot{\vartheta}^2 \cos \vartheta \right) \mathbf{k} \right].$$

Per quanto riguarda l'altro pezzo della formula di Poisson, avremo

$$\omega \mathbf{k} \wedge \mathbf{v}_{P_0}|_{\Sigma} = \frac{\ell}{2} \left(-\omega \dot{\vartheta} \cos \vartheta \mathbf{i} - \omega^2 \sin \vartheta \mathbf{j} \right).$$

La I Equazione Cardinale si scrive:

$$m \mathbf{a}_{P_0}|_{\Sigma} = m \mathbf{g} + \Phi,$$

che in componenti si scrive:

$$\begin{cases} -m\ell\omega\dot{\vartheta}\cos\vartheta = \Phi_x \\ m\frac{\ell}{2}\left(\ddot{\vartheta}\cos\vartheta - \dot{\vartheta}^2\sin\vartheta\right) - \frac{1}{2}m\ell\omega^2\sin\vartheta = \Phi_y \\ m\frac{\ell}{2}\left(\ddot{\vartheta}\sin\vartheta + \dot{\vartheta}^2\cos\vartheta\right) = -mg + \Phi_z, \end{cases} \quad (6.27)$$

Analogamente a quanto visto nella II Equazione Cardinale, i termini interpretati come forze (fittizie) dall'osservatore mobile, sono termini di accelerazione del centro di massa, se valutati dall'osservatore fisso.

Formulazione lagrangiana

Scriviamo la funzione Lagrangiana del pendolo. Anche in questo approccio va scelto il riferimento in cui operare. Se scegliamo il riferimento rotante S , l'energia cinetica dell'asta è solo quella dovuta al moto nel piano individuato dall'origine O e dai versori \mathbf{j} e \mathbf{k} :

$$T = \frac{1}{2}I_O\dot{\vartheta}^2 = \frac{1}{6}m\ell^2\dot{\vartheta}^2.$$

Se i vincoli sono lisci, il sistema è conservativo, ma, oltre alla forza peso, dobbiamo considerare la forza centrifuga che compie lavoro in S e che è “formalmente” conservativa. Per calcolarne l’energia potenziale ricordiamo che il sistema delle forze centrifughe distribuite con continuità sull’asta è equivalente alla risultante (6.17) applicata ai due terzi della lunghezza dell’asta (si veda anche (6.18)). Avendo indicato con $C = \frac{2}{3}\ell(\sin\vartheta\mathbf{j} - \cos\vartheta\mathbf{k})$ il centro di applicazione della risultante delle forze centrifughe, il lavoro infinitesimo compiuto in corrispondenza di una variazione infinitesima dell’angolo ϑ è

$$\begin{aligned} dL_{cf} &= \mathbf{F}_{cf} \cdot dC = \left(\frac{1}{2}m\ell\omega^2 \sin\vartheta\right) \mathbf{j} \cdot \frac{2}{3}\ell(\cos\vartheta\mathbf{j} + \sin\vartheta\mathbf{k}) d\vartheta \\ &= \frac{1}{3}m\ell^2\omega^2 \sin\vartheta \cos\vartheta d\vartheta = \frac{1}{3}m\ell^2\omega^2 \sin\vartheta d\sin\vartheta. \end{aligned} \quad (6.28)$$

La (6.28), scritta come nell’ultimo termine, mostra che il lavoro infinitesimo della risultante delle forze centrifughe è una forma differenziale esatta della funzione potenziale

$$V_{cf} = \frac{1}{6}m\ell^2\omega^2 \sin^2\vartheta = -U_{cf},$$

dove U_{cf} è l’energia potenziale (a meno di una costante arbitraria) delle forze centrifughe.

Osserviamo che il momento di inerzia dell’asta OA rispetto all’asse di versore \mathbf{k} è $I_{O,\mathbf{k}} = \frac{1}{3}m\ell^2 \sin^2\vartheta$, quindi il potenziale e l’energia potenziale possono essere scritti come

$$V_{cf} = -U_{cf} = \frac{1}{2}I_{O,\mathbf{k}}\omega^2.$$

Poiché la forza di Coriolis non compie lavoro, l’unica altra forza da considerare è la forza peso, la cui energia potenziale è

$$U_{peso} = -mg\frac{\ell}{2} \cos\vartheta. \quad (6.29)$$

La Lagrangiana del sistema è dunque

$$\mathcal{L} = T - U = \frac{1}{6}m\ell^2\dot{\vartheta}^2 + mg\frac{\ell}{2} \cos\vartheta + \frac{1}{6}m\ell^2\omega^2 \sin^2\vartheta. \quad (6.30)$$

L’equazione di moto, che corrisponde ovviamente sia alla prima delle (6.21) che alla prima delle (6.26), si ottiene quindi immediatamente dai termini

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\vartheta}} = \frac{1}{3}m\ell^2\ddot{\vartheta}, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \vartheta} = -mg\frac{\ell}{2} \sin\vartheta + \frac{1}{3}m\ell^2\omega^2 \sin\vartheta \cos\vartheta$$

ed è

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\vartheta}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \vartheta} = \frac{1}{3}m\ell^2\ddot{\vartheta} + mg\frac{\ell}{2} \sin\vartheta - \frac{1}{3}m\ell^2\omega^2 \sin\vartheta \cos\vartheta = 0. \quad (6.31)$$

Se calcoliamo la Lagrangiana nel riferimento fisso Σ , la parte dovuta al contributo delle forze (energia potenziale) si riduce all'energia potenziale del peso (6.29).

Per quanto riguarda il termine di energia cinetica dell'asta, invece, dobbiamo tenere conto della rotazione attorno all'asse \mathbf{k} . Pertanto la velocità di istantanea rotazione dell'asta OA rispetto al riferimento fisso è, come visto in precedenza,

$$\boldsymbol{\omega}_{OA} = (\dot{\vartheta}, 0, \omega)^T,$$

e ricordando le (6.24) e (6.25), possiamo calcolare facilmente l'energia cinetica

$$T = \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}_{OA} \cdot \sigma(O) \boldsymbol{\omega}_{OA} = \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}_{OA} \cdot \mathbf{K}(O) = \frac{1}{6} m \ell^2 \dot{\vartheta}^2 + \frac{1}{6} m \ell^2 \omega^2 \sin^2 \vartheta. \quad (6.32)$$

In conclusione la Lagrangiana risulta la stessa calcolata nel riferimento rotante

$$\mathcal{L} = \frac{1}{6} m \ell^2 \dot{\vartheta}^2 + \frac{1}{6} m \ell^2 \omega^2 \sin^2 \vartheta + mg \frac{\ell}{2} \cos \vartheta,$$

e quindi la stessa sarà l'equazione di moto, ma il termine che abbiamo voluto mettere in evidenza con il colore rosso deriva nel primo caso (osservatore rotante S) dall'aver considerato il contributo delle forze centrifughe (forze “apparenti”) e nel secondo caso (riferimento fisso Σ) dal termine di energia cinetica che S non “osserva”.

Nota. I termini dovuti alle forze “apparenti” che compaiono in tutta la discussione di questo esercizio hanno origine e giustificazione nei risultati di Cinematica relativa discussi al Cap. 2. Nel nostro caso, in particolare, ricordando la formula (2.51) per l'accelerazione di un punto osservato da un riferimento fisso Σ ed uno mobile S , l'accelerazione dell'origine è nulla e la rotazione attorno all'asse \mathbf{k} è costante. Non ci sono quindi contributi di forze “apparenti”, dovute all'accelerazioni $\mathbf{a}_{O,\Sigma}$ e $\dot{\boldsymbol{\omega}} \wedge (P - O)$.

6.4 Il doppio pendolo

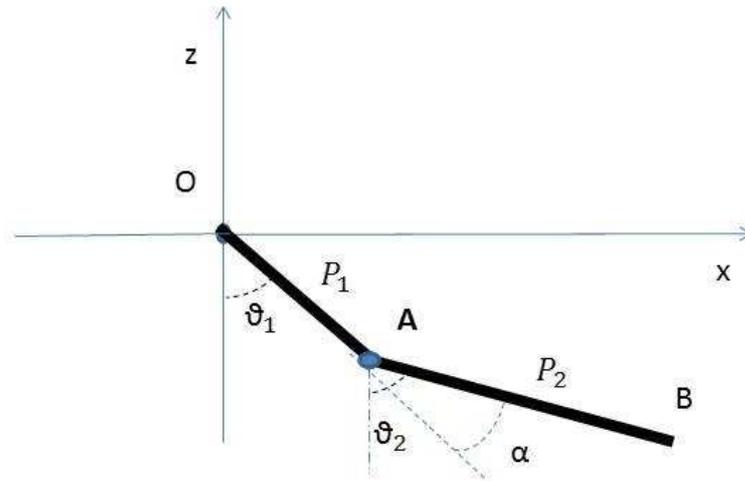


Figura 6.4

Consideriamo un doppio pendolo composto da due aste materiali omogenee, in generale di massa e lunghezza diverse. Sia l'asta OA di massa M , lunghezza L e centro di massa P_1 e l'asta AB di lunghezza l , massa m e centro di massa P_2 . Consideriamo come coordinate lagrangiane (il sistema ha due gradi di libertà) gli angoli ϑ_1 e ϑ_2 che, rispettivamente, le aste OA e OB formano con la direzione (verso negativo) della verticale, coincidente con l'asse z del riferimento cartesiano scelto (si veda la figura). Per scrivere le equazioni di Eulero-Lagrange del sistema occorre determinare la Lagrangiana del sistema, considerando che le forze attive agenti sul sistema siano costituite dalla sola forza peso. Il sistema è quindi conservativo.

L'energia cinetica dell'asta OA si calcola facilmente, considerando che si tratta di un rigido che ruota attorno ad un asse fisso:

$$T_{OA} = \frac{1}{2} I_1 \dot{\vartheta}_1^2, \quad (6.33)$$

dove I_1 è il momento di inerzia dell'asta OA rispetto all'asse di rotazione, ovvero alla retta ortogonale al piano xz , passante per O :

$$I_1 = \frac{1}{3} M L^2.$$

Per calcolare l'energia cinetica dell'asta AB occorre utilizzare il teorema di König:

$$T_{AB} = \frac{1}{2} I_2 \dot{\vartheta}_2^2 + \frac{1}{2} m v_{P_2}^2, \quad (6.34)$$

dove I_2 è il momento di inerzia centrale dell'asta AB rispetto ad una retta ortogonale al piano xz , passante per P_2 :

$$I_2 = \frac{1}{12}m\ell^2$$

e v_{P_2} è il modulo della velocità del suo centro di massa P_2 . v_{P_2} si calcola scrivendo il vettore posizione ($P_2 - O$) in funzione delle coordinate lagrangiane e la sua derivata rispetto al tempo:

$$(P_2 - O) = (L \sin \vartheta_1 + \frac{\ell}{2} \sin \vartheta_2)\mathbf{i} - (L \cos \vartheta_1 + \frac{\ell}{2} \cos \vartheta_2)\mathbf{k}$$

e, di conseguenza

$$\mathbf{v}_{P_2} = (L\dot{\vartheta}_1 \cos \vartheta_1 + \frac{\ell}{2}\dot{\vartheta}_2 \cos \vartheta_2)\mathbf{i} + (L\dot{\vartheta}_1 \sin \vartheta_1 + \frac{\ell}{2}\dot{\vartheta}_2 \sin \vartheta_2)\mathbf{k}.$$

Da calcoli elementari si ottiene

$$v_{P_2}^2 = L^2\dot{\vartheta}_1^2 + \frac{1}{4}\ell^2\dot{\vartheta}_2^2 + L\ell\dot{\vartheta}_1\dot{\vartheta}_2 \cos(\vartheta_1 - \vartheta_2). \quad (6.35)$$

Sostituendo infine la (6.35) in (6.34) si ottiene l'espressione dell'energia cinetica per l'asta AB :

$$T_{AB} = \frac{1}{2}I_2\dot{\vartheta}_2^2 + \frac{1}{2}mL^2\dot{\vartheta}_1^2 + \frac{1}{8}m\ell^2\dot{\vartheta}_2^2 + \frac{1}{2}mL\ell\dot{\vartheta}_1\dot{\vartheta}_2 \cos(\vartheta_1 - \vartheta_2), \quad (6.36)$$

che nel caso considerato ($I_2 = \frac{1}{12}m\ell^2$) conduce alla seguente espressione:

$$T_{AB} = \frac{1}{2}mL^2\dot{\vartheta}_1^2 + \frac{1}{6}m\ell^2\dot{\vartheta}_2^2 + \frac{1}{2}mL\ell\dot{\vartheta}_1\dot{\vartheta}_2 \cos(\vartheta_1 - \vartheta_2). \quad (6.37)$$

L'energia potenziale della forza peso agente sul sistema è data da

$$U = Mgz_{P_1} + mgz_{P_2}$$

dove z_{P_1} e z_{P_2} rappresentano rispettivamente la quota del centro di massa dell'asta OA e dell'asta AB . Esprimendo tali quote attraverso le coordinate lagrangiane scelte, avremo

$$U = -\frac{1}{2}MgL \cos \vartheta_1 - mg(L \cos \vartheta_1 + \frac{\ell}{2} \cos \vartheta_2). \quad (6.38)$$

La Lagrangiana del sistema

$$\mathcal{L} = T_{OA} + T_{AB} - U$$

è quindi data da:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \frac{1}{2} \left(\frac{M}{3} + m \right) L^2 \dot{\vartheta}_1^2 + \frac{1}{6} m \ell^2 \dot{\vartheta}_2^2 + \frac{1}{2} m L \ell \dot{\vartheta}_1 \dot{\vartheta}_2 \cos(\vartheta_1 - \vartheta_2) + \\ & \frac{1}{2} M g L \cos \vartheta_1 + m g \left(L \cos \vartheta_1 + \frac{1}{2} \ell \cos \vartheta_2 \right). \end{aligned} \quad (6.39)$$

Possiamo adesso procedere calcolando le equazioni di Eulero-Lagrange:

$$\begin{cases} \left(\frac{M}{3} + m \right) L^2 \ddot{\vartheta}_1 + \frac{1}{2} m L \ell \ddot{\vartheta}_2 \cos(\vartheta_1 - \vartheta_2) + \frac{1}{2} m L \ell \dot{\vartheta}_2^2 \sin(\vartheta_1 - \vartheta_2) + \left(\frac{M}{2} + m \right) L g \sin \vartheta_1 = 0 \\ m L \ell \ddot{\vartheta}_1 \cos(\vartheta_1 - \vartheta_2) + \frac{1}{3} m \ell^2 \ddot{\vartheta}_2 - \frac{1}{2} m L \ell \dot{\vartheta}_1^2 \sin(\vartheta_1 - \vartheta_2) + \frac{1}{2} m \ell g \sin \vartheta_2 = 0. \end{cases} \quad (6.40)$$

Vediamo sotto quali condizioni il sistema formato dalle due aste si comporta come un unico sistema rigido. Questo significa provare se le (6.40) ammettono soluzioni con $\vartheta_1 - \vartheta_2 = \text{costante}$.

Poniamo $\vartheta_1 - \vartheta_2 = \alpha$ e vediamo se è possibile risolvere le (6.40) sotto l'ipotesi di $\alpha = \text{costante}$, ovvero di $\dot{\alpha} = 0$ e $\ddot{\alpha} = 0$, $\forall t > t_0$. Queste ipotesi riducono il problema ad un solo grado di libertà, potendo sostituire ϑ_2 con $\vartheta_1 - \alpha$ ed avendo $\dot{\vartheta}_2 = \dot{\vartheta}_1$ e $\ddot{\vartheta}_2 = \ddot{\vartheta}_1$. Introducendo queste assunzioni nella (6.40) otteniamo

$$\begin{cases} \left[\left(\frac{M}{3} + m \right) L^2 + \frac{m}{2} L \ell \cos \alpha \right] \ddot{\vartheta}_1 + \frac{1}{2} m L \ell \dot{\vartheta}_1^2 \sin \alpha + \left(\frac{M}{2} + m \right) L g \sin \vartheta_1 = 0 \\ \left(\frac{1}{2} m L \ell \cos \alpha + \frac{1}{3} m \ell^2 \right) \ddot{\vartheta}_1 - \frac{1}{2} m L \ell \dot{\vartheta}_1^2 \sin \alpha + \frac{1}{2} m \ell g \sin(\vartheta_1 - \alpha) = 0. \end{cases} \quad (6.41)$$

Perché le due equazioni in (6.41) (due equazioni in un'incognita, ϑ_1) ammettano la soluzione cercata (a partire da generiche condizioni iniziali per ϑ e $\dot{\vartheta}$) occorre che non siano fra loro indipendenti, ovvero che i coefficienti dei termini omologhi siano fra loro proporzionali secondo una stessa costante. Se osserviamo le (6.41) notiamo però che il coefficiente del termine in $\dot{\vartheta}^2$ nelle due equazioni risulta di modulo uguale, ma segno opposto. Questo rende le due equazioni indipendenti, qualunque valore abbiano gli altri coefficienti. Pertanto i coefficienti dei termini in $\dot{\vartheta}^2$ devono essere identicamente nulli, ovvero

$$\alpha = 0 \quad \text{oppure} \quad \alpha = \pi.$$

Nel caso $\alpha = 0$ le (6.41) diventano

$$\begin{cases} \left[\left(\frac{M}{3} + m \right) L^2 + \frac{m}{2} L \ell \right] \ddot{\vartheta}_1 + \left(\frac{M}{2} + m \right) L g \sin \vartheta_1 = 0 \\ \left(\frac{1}{2} m L \ell + \frac{1}{3} m \ell^2 \right) \ddot{\vartheta}_1 + \frac{1}{2} m \ell g \sin \vartheta_1 = 0, \end{cases} \quad (6.42)$$

che hanno la struttura dell'equazione del pendolo fisico. La soluzione $\alpha = 0$ (e analogamente per $\alpha = \pi$, con dei cambiamenti di segno dovuti al fatto che $\cos \pi = -1$) esiste se il determinante dei coefficienti:

$$\det \begin{pmatrix} \left(\frac{M}{3} + m \right) L^2 + \frac{m}{2} L \ell & \left(\frac{M}{2} + m \right) L g \\ \frac{1}{2} m L \ell + \frac{1}{3} m \ell^2 & \frac{1}{2} m \ell g \end{pmatrix} = 0$$

Se i parametri fisici (masse e lunghezze) in gioco sono scelti opportunamente è possibile far muovere il doppio pendolo come un unico sistema rigido. Il problema presentato può essere considerato un modello approssimato, ma sufficientemente attendibile, di un sistema “campana + batacchio”. È noto che in alcuni casi una campana non suona perché il batacchio si limita a piccole oscillazioni e non riesce mai a colpire la campana. Questo fenomeno è stato qui modellizzato nel moto rigido del doppio pendolo (campana di Colonia, 1876).

6.5 Il pendolo di Furuta

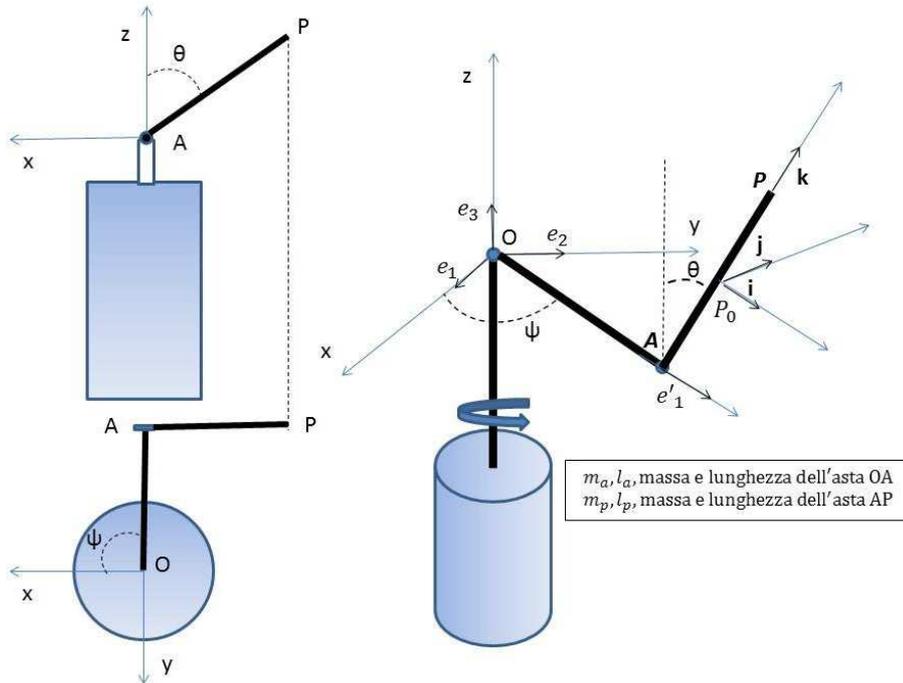


Figura 6.5

Il pendolo di Furuta, o pendolo rotazionale inverso, è costituito da un braccio (l'asta OA in Fig. 6.2) guidato da un motore, che ruota in un piano orizzontale, e da un pendolo (l'asta AB in Fig. 6.2) collegato nel punto A al primo braccio mediante una cerniera cilindrica liscia, libero di ruotare in un piano verticale.

Calcoliamo l'energia cinetica dell'asta AB , di massa m_p e lunghezza l_p , per mezzo del Teorema di König:

$$T = \frac{1}{2}mv^2(P_0) + \frac{1}{2}\sigma(P_0)\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\omega} = T_{P_0} + T_R \quad (6.43)$$

e studiamo in dettaglio il secondo termine in (6.43). Il moto dell'asta non è piano rispetto all'osservatore fisso, ma la velocità di istantanea rotazione $\boldsymbol{\omega}$ è esprimibile facilmente, trattandosi di due rotazioni rispetto ad assi ortogonali fra loro, per mezzo delle derivate degli angoli indicati in Fig. 6.2:

$$\boldsymbol{\omega} = \dot{\psi} \mathbf{e}_3 + \dot{\theta} \mathbf{e}'_1, \quad (6.44)$$

dove \mathbf{e}_3 è il versore dell'asse z (sistema fisso) e \mathbf{e}'_1 è il versore che individua la direzione dell'asta di lunghezza l_a e che si ottiene ruotando nel verso positivo il versore \mathbf{e}_1 dell'angolo ψ , sul piano $\{x, O, y\}$.

Poiché $\sigma(P_0)$ deve essere rappresentato in un riferimento solidale con l'asta (e centro P_0), scegliamo un riferimento principale, con il versore \mathbf{k} diretto come l'asta ed il versore \mathbf{i} scelto parallelo a \mathbf{e}'_1 ; \mathbf{j} completa la terna ortogonale di mano destra. In questo riferimento solidale la matrice di inerzia assume la forma:

$$\sigma(P_0) = \begin{pmatrix} \frac{1}{12}m_p l_p^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{12}m_p l_p^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (6.45)$$

Per poter calcolare il termine di energia cinetica relativa $\frac{1}{2}\sigma(P_0)\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\omega}$ è quindi necessario esprimere i versori \mathbf{e}_3 e \mathbf{e}'_1 nella terna solidale $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$. Per esprimere \mathbf{e}'_1 nella terna solidale $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ basta effettuare una rotazione di un angolo $-\theta$ attorno all'asse individuato dal versore \mathbf{i} . Come conseguenza il versore \mathbf{k} viene a coincidere con \mathbf{e}_3 :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{e}'_1 \equiv \mathbf{i} \\ \mathbf{e}'_2 \\ \mathbf{e}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{i} \\ \mathbf{j} \\ \mathbf{k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{i} \\ \cos \theta \mathbf{j} - \sin \theta \mathbf{k} \\ \sin \theta \mathbf{j} + \cos \theta \mathbf{k} \end{pmatrix}, \quad (6.46)$$

da cui

$$\mathbf{e}_3 = \sin \theta \mathbf{j} + \cos \theta \mathbf{k}.$$

Di conseguenza

$$\boldsymbol{\omega} = \dot{\theta} \mathbf{i} + \dot{\psi} \sin \theta \mathbf{j} + \dot{\psi} \cos \theta \mathbf{k} \quad (6.47)$$

ed il calcolo di T_R risulta immediato:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \frac{1}{12}m_p l_p^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{12}m_p l_p^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \sin \theta \\ \dot{\psi} \cos \theta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \sin \theta \\ \dot{\psi} \cos \theta \end{pmatrix} \\ & = \frac{1}{12}m_p l_p^2 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{12}m_p l_p^2 \sin^2 \theta \dot{\psi}^2. \end{aligned} \quad (6.48)$$

Calcoliamo adesso il contributo dovuto al centro di massa. Possiamo scrivere il vettore $(P_0 - O)$ nel modo seguente:

$$(P_0 - O) = (P_0 - A) + (A - O) = \frac{1}{2}l_p \mathbf{k} + l_a \mathbf{e}'_1. \quad (6.49)$$

Per calcolare facilmente $\mathbf{v}(P_0)$, esprimiamo \mathbf{k} e \mathbf{e}'_1 nella base del riferimento fisso, per mezzo degli angoli di Eulero:

$$\begin{aligned} \mathbf{e}'_1 &= \cos \psi \mathbf{e}_1 + \sin \psi \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{k} &= \sin \psi \sin \theta \mathbf{e}_1 - \cos \psi \sin \theta \mathbf{e}_2 + \cos \theta \mathbf{e}_3. \end{aligned} \quad (6.50)$$

Quindi

$$(P_0 - O)$$

$$= \left[\frac{1}{2} l_p \sin \psi \sin \theta + l_a \cos \psi \right] \mathbf{e}_1 + \left[-\frac{1}{2} l_p \cos \psi \sin \theta + l_a \sin \psi \right] \mathbf{e}_2 + \left[\frac{1}{2} l_p \cos \theta \right] \mathbf{e}_3 ,$$

che può essere derivata componente per componente (i versori sono fissi!) per ottenere la velocità del centro di massa:

$$v_x(P_0) = \frac{1}{2} l_p (\dot{\psi} \cos \psi \sin \theta + \dot{\theta} \sin \psi \sin \theta) - l_a \dot{\psi} \sin \psi ,$$

$$v_y(P_0) = \frac{1}{2} l_p (\dot{\psi} \sin \psi \sin \theta - \dot{\theta} \cos \psi \sin \theta) + l_a \dot{\psi} \cos \psi , \quad (6.51)$$

$$v_z(P_0) = -\frac{1}{2} l_p \dot{\theta} \sin \theta ,$$

e quindi

$$v^2(P_0) = \frac{l_p^2}{4} (\dot{\theta}^2 + \dot{\psi}^2 \sin^2 \theta) - l_p l_a \dot{\psi} \dot{\theta} \cos \theta + l_a^2 \dot{\psi}^2 . \quad (6.52)$$

L'energia cinetica totale dell'asta AP risulta infine:

$$T_{AP} = \frac{l_p^2}{6} m_p (\dot{\theta}^2 + \dot{\psi}^2 \sin^2 \theta) - \frac{1}{2} m_p l_p l_a \dot{\psi} \dot{\theta} \cos \theta + \frac{1}{2} m_p l_a^2 \dot{\psi}^2 . \quad (6.53)$$

6.6 Il sistema biella-manovella

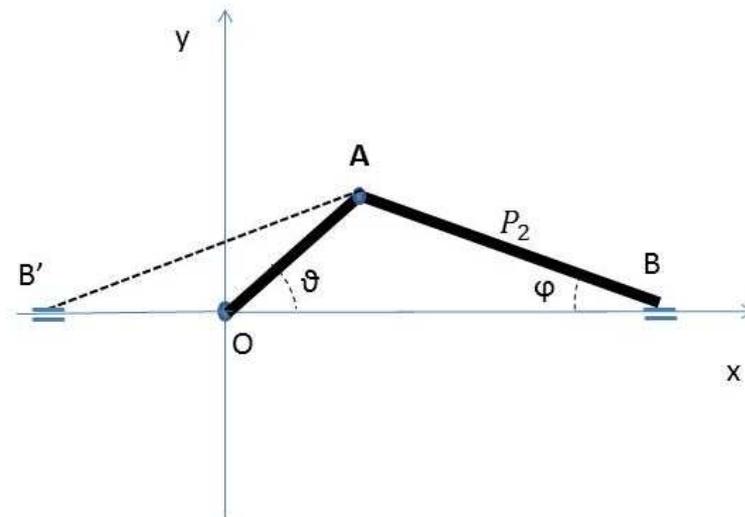


Figura 6.6

Consideriamo il sistema mostrato in figura e composto da due aste materiali omogenee. L'asta OA ruota attorno ad un asse fisso passante per O ed

ortogonale al piano di figura. L'asta AB è incernierata alla prima asta in A ed ha l'altro estremo B vincolato a muoversi su una guida rettilinea liscia, assunta come asse delle ascisse. Massa e lunghezza di OA sono rispettivamente m e ℓ , quelle di AB , M e L , con $m < M$ e $\ell < L$.

L'asta OA è nota come manovella e l'asta AB come biella. Il sistema costituisce un cinematismo di grande importanza in quanto consente di trasformare un moto rettilineo (quello del punto B) in un moto rotatorio (quello del punto A).

Il sistema ha un solo grado di libertà, ma la scelta della coordinata lagrangiana opportuna non è banale. Infatti, la configurazione del triangolo $O\widehat{A}B$ sarebbe univocamente determinata, per il primo criterio di congruenza, se fosse noto l'angolo al vertice \widehat{A} , essendo noti i lati OA e AB . Tuttavia questo angolo non risulta affatto comodo per esprimere le velocità di istantanea rotazione delle due aste, $\boldsymbol{\omega}_{OA}$ e $\boldsymbol{\omega}_{AB}$, non essendo un angolo fra una direzione solidale ed una fissa, ma fra due direzioni rispettivamente solidali a ciascuna delle due aste. In questo senso sono più adatti gli angoli ϑ e φ indicati in figura, che permettono una scrittura semplice per le velocità di istantanea rotazione:

$$\boldsymbol{\omega}_{OA} = \dot{\vartheta} \mathbf{k} \quad \text{e} \quad \boldsymbol{\omega}_{AB} = -\dot{\varphi} \mathbf{k}, \quad (6.54)$$

avendo scelto il verso antiorario positivo per la crescita degli angoli.

La scelta di φ come coordinata lagrangiana non è opportuna, perché tale angolo varia in un intervallo chiuso $[-\arcsin \frac{\ell}{L}, +\arcsin \frac{\ell}{L}]$, quindi la scelta migliore resta quella di ϑ , angolo che varia liberamente su tutto \mathbb{R} , per l'ipotesi $\ell < L$. L'angolo ϑ non individua un'unica configurazione del triangolo $O\widehat{A}B$, ma anche quella $B'\widehat{A}O$ (si veda la figura 6.5). D'altra parte, se diamo le condizioni iniziali per il sistema in modo che il punto B abbia inizialmente ascissa positiva, basterà prendere in considerazione solo la soluzione per la quale $x_B > 0$, $\forall t > t_0$ e quindi ϑ soddisfa tutte le proprietà richieste ad una coordinata lagrangiana.

Poiché il sistema biella-manovella ha un solo grado di libertà, energia cinetica e potenziale ed eventuali componenti lagrangiane delle forze sono esprimibili come funzioni della sola coordinata lagrangiana scelta e della sua derivata rispetto al tempo, rispettivamente ϑ e $\dot{\vartheta}$. Tuttavia è più comodo usare strumentalmente anche la coordinata φ e introdurre solo alla fine la relazione fra i due angoli (teorema dei seni) e fra le loro derivate rispetto al tempo.

Per il calcolo dell'energia cinetica avremo semplicemente

$$T = T_{OA} + T_{AB} = \frac{1}{2} I_1(O) \omega_{OA}^2 + \frac{1}{2} M v_{P_2}^2 + \frac{1}{2} I_2(P_2) \omega_{AB}^2,$$

dove per l'asta OA abbiamo usato la formula per le rotazioni attorno ad un asse fisso e per l'asta AB il teorema di König; inoltre, $I_1(O)$, il momento di inerzia di OA rispetto all'asse passante per O ed ortogonale al piano di figura, vale $\frac{1}{3}m\ell^2$ e $I_2(P_2)$ è il momento di inerzia dell'asta AB rispetto all'asse passante per il centro di massa di AB , P_2 , ed ortogonale al piano di figura e vale $\frac{1}{12}ML^2$. Pertanto avremo

$$\frac{1}{2}I_1(O)\omega_{OA}^2 = \frac{1}{6}m\ell^2\dot{\vartheta}^2 \quad \text{e} \quad \frac{1}{2}I_2(P_2)\omega_{AB}^2 = \frac{1}{24}ML^2\dot{\varphi}^2. \quad (6.55)$$

Calcoliamo la velocità di P_2 :

$$(P_2 - O) = \left(\ell \cos \vartheta + \frac{L}{2} \cos \varphi \right) \mathbf{i} + \frac{L}{2} \sin \varphi \mathbf{j},$$

da cui

$$\mathbf{v}_{P_2} = - \left(\dot{\vartheta} \ell \sin \vartheta + \frac{L}{2} \dot{\varphi} \sin \varphi \right) \mathbf{i} + \frac{L}{2} \dot{\varphi} \cos \varphi \mathbf{j}$$

e

$$\frac{1}{2}Mv_{P_2}^2 = \frac{1}{2}M\ell^2\dot{\vartheta}^2 \sin^2 \vartheta + \frac{1}{2}ML\ell\dot{\vartheta}\dot{\varphi} \sin \vartheta \sin \varphi + \frac{1}{8}ML^2\dot{\varphi}^2. \quad (6.56)$$

Da (6.55) e (6.57) otteniamo l'espressione dell'energia cinetica totale del sistema biella-manovella:

$$T = \frac{1}{2}\ell^2\dot{\vartheta}^2 \left(\frac{m}{3} + M \sin^2 \vartheta \right) + \frac{1}{2}ML\ell\dot{\vartheta}\dot{\varphi} \sin \vartheta \sin \varphi + \frac{1}{6}ML^2\dot{\varphi}^2. \quad (6.57)$$

La (6.57) è ancora espressa in termini delle variabili $\vartheta, \varphi, \dot{\vartheta}, \dot{\varphi}$, che non sono indipendenti. Il legame fra ϑ e φ può essere espresso per mezzo del teorema dei seni:

$$\ell \sin \vartheta = L \sin \varphi \quad \Rightarrow \quad \sin \varphi = \lambda \sin \vartheta$$

dove $\lambda = \frac{\ell}{L} < 1$. Quindi

$$\dot{\varphi} \cos \varphi = \lambda \dot{\vartheta} \cos \vartheta \quad \Rightarrow \quad \dot{\varphi} = \lambda \dot{\vartheta} \frac{\cos \vartheta}{\cos \varphi}.$$

Per scrivere tutto in funzione solo di ϑ e $\dot{\vartheta}$ poniamo:

$$\cos \varphi = \sqrt{1 - \sin^2 \varphi} = \sqrt{1 - \lambda^2 \sin^2 \vartheta} \quad \text{e} \quad \dot{\varphi} = \lambda \dot{\vartheta} \frac{\cos \vartheta}{\sqrt{1 - \lambda^2 \sin^2 \vartheta}}.$$

L'energia cinetica del sistema biella-manovella è quindi

$$T = \frac{1}{2}\ell^2\dot{\vartheta}^2 \left(\frac{m}{3} + M \sin^2 \vartheta \right) + \frac{1}{2}ML\ell\lambda\dot{\vartheta}^2 \sin^2 \vartheta + \frac{1}{6}ML^2\lambda^2\dot{\vartheta}^2 \frac{\cos^2 \vartheta}{1 - \lambda^2 \sin^2 \vartheta}. \quad (6.58)$$

Indice analitico

Angoli di Eulero

- angolo di nutazione, 39, 120
- angolo di precessione, 39, 120
- angolo di rotazione propria, 39
- rappresentazione di ω per mezzo degli angoli di Eulero, 41

Cinematica dei rigidi

- accelerazione, 34
- asse istantaneo di moto, 36
- Composizione di moti rigidi, 42
- invariante scalare, 35
- Teorema di Eulero, 37
- velocità, 34

Cinematica del punto

- Velocità e accelerazione, 8
- Velocità e accelerazione nel riferimento intrinseco, 14
- Velocità e accelerazione nel riferimento polare piano, 9
- Velocità e accelerazione nel riferimento polare sferico, 10
- Velocità e accelerazione nella base polare piana, 9

Cinematica relativa

- accelerazione relativa, 28
- Coseni direttori, 18
- Formule di Poisson, 23
- Matrice di rotazione, 18
- Relazioni di ortonormalità, 19
- velocità relativa, 28

Dinamica dei Sistemi Rigidi

- I Equazione Cardinale, 46
- II Equazione Cardinale, 47
- Momento angolare, 47

Teorema del moto del centro di massa, 46

Teorema di Huygens-Steiner, 71

Teorema di König, 53

Teorema di König per sistemi rigidi, 54

Esercizi

- Il pendolo ad asta, 110
- Il pendolo di Furuta, 119
- Il pendolo matematico, 109
- Il pendolo rotante, 111
- Il sistema biella-manovella, 121

Meccanica lagrangiana

- Atto di moto di trascinamento, 91
- Atto di moto virtuale, 91
- Binomio di Lagrange, 79
- Coordinate lagrangiane, 89
- Equazioni di Eulero-Lagrange, 80, 83, 85, 94
- Forma lagrangiana dell'energia cinetica, 96
- Hamiltoniana, 104
- Il punto libero, 75
- Il punto vincolato ad una linea, 84
- Il punto vincolato ad una superficie, 80
- Integrali primi, 101
- Lagrangiana, 80, 83, 93
- Principio dei lavori virtuali, 83, 85, 93
- Spazio delle configurazioni, 88
- Spazio delle fasi, 91

Spazio normale, 90
Spazio tangente, 90
Statica dei sistemi olonomi, 100
Teorema di Lagrange-Dirichlet,
100
Velocità di trascinamento, 83, 91
Velocità virtuale, 83, 85, 91
Vincoli lisci, 94
Vincoli olonomi, 88

**Sistemi di riferimento e sistemi
di coordinate**

Coordinate cilindriche, 5
Coordinate polari piane, 2
Coordinate sferiche, 4
Descrizione geometrica, 1

Indice

1	Sistemi di riferimento e sistemi di coordinate	1
1.1	La descrizione geometrica	1
1.2	Coordinate e basi ortonormali nel piano	2
1.3	Coordinate e basi ortonormali nello spazio	4
1.4	Cinematica del punto	7
2	Cinematica relativa	17
2.1	Cinematica del punto	17
3	Sistemi rigidi	31
3.1	Definizione e gradi di libertà	31
3.2	Cinematica dei Rigidi	34
3.3	Teorema di Eulero	38
3.4	Angoli di Eulero	39
3.5	Rappresentazione di ω	42
3.6	Composizione di moti rigidi	43
4	Dinamica dei Sistemi Rigidi	45
4.1	Le equazioni cardinali	45
4.2	Le equazioni cardinali della Dinamica per Sistemi Rigidi	50
4.3	I Teoremi dell'Energia	53
4.4	Proprietà della matrice di inerzia	62
4.5	Esempi	63
4.6	Appendice	71
5	Meccanica lagrangiana	75
5.1	Introduzione	75
5.2	Il punto libero	76
5.3	Il punto vincolato	80
5.4	Sistemi a vincoli olonomi e lisci	86
5.5	Forma lagrangiana dell'energia cinetica	95
5.6	Statica dei sistemi olonomi	98
5.7	Integrali primi delle equazioni di Eulero-Lagrange	100

5.8	Appendice 1	105
5.9	Appendice 2	106
6	Esercizi	107
6.1	Il pendolo matematico	107
6.2	Il pendolo ad asta	109
6.3	Il pendolo rotante	113
6.4	Il doppio pendolo	122
6.5	Il pendolo di Furuta	126
6.6	Il sistema biella-manovella	128